17. *Einige Sätze über Kinematik.*

Von Tadahiko KUBOTA, M. J. A.

(Comm. July 12, 1948.)

Hier gebe ich einen analytischen Beweis für den Mannheimschen Satz über Kinematik, den er in seinem Buche über Kinematik auf synthetischem Wege bewiesen hat.[1] Hier benutze ich die Methode, die E. J. Nyström im Jahre 1932 zum Beweis des Darbouxschen Satzes verwendet hat.[2] Auch behandle ich einige Probleme in der Kinematik.

1. Der Satz lautet:

Bewegen sich vier feste, auf einer beweglichen Geraden g gelegene Punkte auf vier festen Kugeln, deren Mittelpunkte auf einer gegebenen Ebene E liegen, so bewegen sich auch andere Punkte der Geraden g auf festen Kugeln, deren Mittelpunkte auf E liegen. Ihre Mittelpunkte liegen auf einem Kegelschnitte. Die Punktreihe auf der Geraden g ist zur Punktreihe auf dem Kegèlschnitte projektiv.

Zum Beweis dieses Satzes nehme man die gegebene Ebene E als $z=0$ des rechtwinkligen Koordinatensystems an, und die Gleichungen von den vier Kugeln seien

$$x^2+y^2+z^2-2h_ix-2k_iy+h_i^2+k_i^2-r_i^2=0 \qquad i=1,2,3,4,$$

Die Koordinaten der vier festen Punkte auf g seien

$$x_i=\xi+lt_i,\quad y_i=\eta+mt_i,\quad z_i=\zeta+nt_i \qquad i=1,2,3,4.$$

und die des anderen Punktes P auf g seien

$$x=\xi+lt,\quad y=\eta+mt,\quad z=\zeta+nt$$

wobei $l^2+m^2+n^2=1$ ist.

Dann gelten

$$[x+l(t_i-t)=h_i]^2+[y+m(t_i-t)-k_i]^2 +[z+n(t_i-t)]^2=r_i^2 \qquad i=1,2,3,4.$$

d. h.

$$x^2+y^2+z^2-2h_ix-2k_iy+(t_i-t)^2+h_i^2+k_i^2-r_i^2-2h_il(t_i-t) -2k_im(t_i-t)+2(xl+ym+zn)(t_i-t)=0,\quad i=1,2,3,4.$$

Eliminiert man l, m, $xl+ym+zn$ aus den obigen Gleichungen, so erhält man

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2-2h_1x-2k_1y+(t_1-t)^2+h_1^2+k_1^2-r_1^2 & h_1(t_1-t) & h_1(t_1-t) & t_1-t \\ x^2+y^2+z^2-2h_2x-2k_2y+(t_2-t)^2+h_2^2+k_2^2-r_2^2 & h_2(t_2-t) & k_2(t_2-t) & t_2-t \\ x^2+y^2+z^2-2h_3x-2k_3y+(t_3-t)^2+h_3^2+k_3^2-r_3^2 & h_3(t_3-t) & k_3(t_3-t) & t_3-t \\ x^2+y^2+z^2-2h_4x-2k_4y+(t_4-t)^2+h_4^2-k_4^2-r_4^2 & h_4(t_4-t) & k_4(t_4-t) & t_4-t \end{vmatrix}=0,$$

welche eine Kugel darstellt.

Also liegt der Punkt P auf der obigen Kugel. Bezeichnet man die Koordinaten des Mittelpunktes mit h, k, so sind

---

1) Mannheim Principes et développpements de géométrie cinématique, 1894.

2) E. J. Nyström, Über den Darboux-Königsschen Planigraphen. Societas cientiarum Fennica Commentationes Physico-Mathematicae VI 15 (1932).