3. *Zum Teilerkettensatz in kommutativen Ringen*

Von Hazimu SATO
Pädagogische Fakultät, Hiroshima Universität
(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., Jan. 12, 1953)

In der vorliegenden Note verstehen wir unter dem Ring $\mathfrak{R}$ stets einen allgemeinen kommutativen Ring. Das Ziel dieser Arbeit ist zu zeigen, dass wir, unter den folgenden Bedingungen, die Gültigkeit vom Teilerkettensatz in $\mathfrak{R}$ herleiten können.

Bedingungen:

(1) *Ist eine Teilerkette von Halbprimidealen*[1] $\mathfrak{h}_1 \subseteqq \mathfrak{h}_2 \subseteqq \cdots$ *in* $\mathfrak{R}$ *gegeben, so bricht die Kette nach endlich vielen Gliedern ab.*

(2) *Wenn ein Ideal* $\mathfrak{a}$ *einen und nur einen minimalen Primidealteiler*[2] $\mathfrak{p}$ *(einschl.* $\mathfrak{R}$*) besitzt, so gilt der Teilerkettensatz zwischen* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{p}$.

Die Notwendigkeit der Bedingungen ist klar. Im folgenden wollen wir zeigen, dass die Bedingungen hinreichend sind.

1. Erstens behaupten wir:

Gilt in $\mathfrak{R}$ *die Bedingung* (1), *so können wir jedes Halbprimideal* $\mathfrak{h}$ *als einen kürzesten Durchschnitt von endlich vielen minimalen Primidealteilern von* $\mathfrak{h}$ *darstellen.*

Es sei $\mathfrak{h}$ ein Halbprimideal. Benutzt man die Tatsache, dass der Idealquotient $\mathfrak{h}:\mathfrak{b}$ auch ein Halbprimideal ist, wo $\mathfrak{b}$ ein beliebiges Ideal ist, so können wir auf ganz dieselben Weisen, wie S. Mori in seinen Arbeiten[3] gezeigt hat, die Behauptung beweisen.

2. Wir gehen nun zum Beweise des Teilerkettensatzes über. Es sei

$$\text{(A)} \qquad \mathfrak{a}_1 \subseteqq \mathfrak{a}_2 \subseteqq \mathfrak{a}_3 \subseteqq \cdots$$

eine Teilerkette von Idealen $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{h}_i$ das zugehörige Halbprimideal von $\mathfrak{a}_i$ $(i=1, 2, \cdots)$.[4] Dann ist offenbar $\mathfrak{h}_1 \subseteqq \mathfrak{h}_2 \subseteqq \cdots$, und wegen (1) muss diese Kette im Endlichen (etwa nach N_1 Schritten) abbrechen, nämlich $\mathfrak{h}_{N_1} = \mathfrak{h}_{N_1+1} = \cdots$. Zur Abkürzung setzen wir $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{N_1}$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{N_1}$

---

1) Ein Ideal $\mathfrak{h}$ heisst Halbprimideal, wenn es in dem Restklassenring $\mathfrak{R}/\mathfrak{h}$ kein nilpotentes Element gibt.

2) Unter einem minimalen Primidealteiler eines Ideals $\mathfrak{a}$ verstehen wir einen Primidealteiler, zwischen dem und $\mathfrak{a}$ kein Primideal eingeschaltet werden kann.

3) S. Mori: Über Ringe, in denen die grössten Primärkomponenten jedes Ideals eindeutig bestimmt sind, Jour. Sci. Hiroshima Univ., **1**, 161 (1931).

——: Über eindeutige Reduktion von Idealen in Ringen ohne Teilerkettensatz, ibid., **3**, 299 (1933).

——: Über Ringe, die den Durchschnittssatz gestatten, ibid., **2**, 130 (1942).

4) Die Gesamtheit der Elemente, die in bezug auf $\mathfrak{a}$ nilpotent sind, heisst das zu $\mathfrak{a}$ gehörige Halbprimideal.