142. *Sur les équations* $-\dfrac{d^2}{dt^2}u+t^\alpha\Lambda u=f,\ \alpha\geqq 0$

Par Tadato MATSUZAWA
Institut Mathématique Faculté des Sciences Université de Nagoya

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M. J. A., June 12, 1970)

§0. Introduction. Nous démontrons dans le §2 la régularité des solutions faibles du problème au bord pour les équations à coéfficients opérationnels dégénérés:

$$Lu=-\frac{d^2}{dt^2}u+t^\alpha\Lambda u=f,\quad \alpha\geqq 0,$$

Λ auto-adjoint, positif dans un espace hilbertien.
Nous poursuivons le raisonnement adopté dans [7] au lieu de la régularisation elliptique (cf. [1]). Les résultats dans [1] concernant les espaces avec poids (préparés dans le §1) y sont importants. Dans le §3, nous notons que les résultats principaux dans [1] et [7] sont obtenus comme applications du Théorème 2.5.

§1. Espaces avec poids. Utilisons les notations dans [5]. Soit Y un espace de Hilbert. On désigne par $L^2(0,T;Y)$ les (classes de) fonctions $t\mapsto f(t)$ de carré intégrable sur $[0,T]$ à valeurs dans Y. Muni de la norme

$$\left(\int_0^T\|f(t)\|_Y^2dt\right)^{1/2}=\|f\|_{L^2(0,T;Y)},\tag{1.1}$$

$L^2(0,T;Y)$ est un espace de Hilbert. On désigne par $H^m(0,T;Y)$ les (classes de) fonctions f telles que $f,\cdots,D_t^mf\in L^2(0,T;Y)$, où D_t^mf désigne la dérivée (d'ordre m) de f au sens des distributions sur $]0,T[$ à valeurs dans Y. On le munit de la norme

$$\|f\|_{H^m(0,T;Y)}=(\|f\|^2_{L^2(0,T;Y)}+\cdots+\|D_t^mf\|^2_{L^2(0,T;Y)})^{1/2}.\tag{1.2}$$

Soit maintenant Λ un opérateur non borné dans Y, auto-adjoint, positif de domaine $D(\Lambda)$. Soit α réel, on considère l'espace de Hilbert $W^m(\alpha,\theta)$ comme suit:

$$W^m(\alpha,\theta)=\{u\,|\,u\in H^m(0,T;Y),\ t^\alpha u\in L^2(0,T;D(\Lambda^\theta)\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{W^m(\alpha,\theta)}=(\|u\|^2_{H^m(0,T;Y)}+\|t^\alpha u\|^2_{L^2(0,T;D(\Lambda^\theta))})^{1/2}.\tag{1.3}$$

Théorème 1.1 (cf. [1], [3], [6]). *Supposons* $-\dfrac{1}{2}<\alpha$. *L'application* $u\mapsto D_t^ju(0)$, $(j=0,\cdots,m-1)$ *est linéaire, continue et surjective de* $W^m(\alpha,1)$ *dans* $D(\Lambda^{(2m-2j-1)/2(\alpha+m)})$.
Désignons par $\mathring{W}^m(\alpha,\theta)$ les u appartenant à $W^m(\alpha,\theta)$ telles que