197. *Remarque sur les espaces fonctionnels au noyau besselien*

Par Masayuki Itô
Institut Mathématique d'Université de Nagoya

(Comm. by Kinjirô Kunugi, M. J. A., June 12, 1971)

1. Soit R^n l'espace euclidien à n ($\geqq 2$) dimensions. Rappelons que le noyau besselien $G_{2\alpha}$ d'ordre 2α sur R^n est une fonction positive, continue au sens large dans R^n et dont la transformation de Fourier est de la forme

$$\hat{G}_{2\alpha}(x)=(1+|x|^2)^{-\alpha},$$

où α est un nombre positif (voir [1]). Il est caractérisé, d'autre part, par le noyau reproduit de l'espace fonctionnel $P^\alpha(R^n)$ sur R^n, qui est obtenu par la complété de $C_0^\infty(R^n)$ par la norme

$$\|u\|_{2\alpha}=\left(\int|\hat{u}(x)|^2(1+|x|^2)^\alpha dx\right)^{1/2}$$

(voir l'article cité ci-dessus). Notons $T_{2\alpha}$ la distribution sur R^n dont la transformation de Fourier est égale à $(1+|x|^2)^\alpha$. Alors $T_{2\alpha}*G_{2\alpha}=\varepsilon$, où ε est la mesure de Dirac à l'origine.

Pour un ouvert Ω de R^n, $C_0^\infty(\Omega)$ désigne l'espace de fonctions numériques, infiniment dérivables dans R^n et à support compact dans Ω. En complétant $C_0^\infty(\Omega)$ par la présente norme, on obtient l'espace fonctionnel régulier $P^\alpha(\Omega)$ sur Ω, qui s'appelle l'espace fonctionnel au noyau besselien d'ordre 2α sur Ω (voir [4]). On note $E_\alpha(\Omega)$ l'ensemble de mesures positives μ dans Ω, à support compact et avec $\iint G_{2\alpha}(x-y)d\mu(y)d\mu(x)<+\infty$. Alors, pour toute μ de $E_\alpha(\Omega)$, il existe le potentiel $U_{2\alpha}^\Omega\mu$ de μ dans $P^\alpha(\Omega)$.

On note

$$G_{2\alpha}^\Omega(x,y)=\int\cdots\int G_{2(\alpha-p)}^\Omega(x,z_1)G_2^\Omega(z_1,z_2)\cdots G_2^\Omega(z_p,y)dz_1\cdots dz_p,$$

où p est un entier non-négatif tel que $0<\alpha-p\leqq 1$ et $G_{2(\alpha-p)}^\Omega$ (resp. G_2^Ω) est la fonction greenienne dans Ω obtenue par le balayage relatif au noyau $G_{2(\alpha-p)}$ (resp. G_2). Alors $G_{2\alpha}^\Omega$ posséde les même propriétés que la fonction greenienne ordinaire.

I. Higuchi a montré, dans son article [4], que s'il existe un ouvert non-vide et borné Ω de R^n tel que $G_{2\alpha}^\Omega$ soit le noyau reproduit de $P^\alpha(\Omega)$, alors $0<\alpha\leqq 1$.

Cela pourra être amélioré comme la proposition suivante:

Proposition. *Soit α un nombre positif. Alors les trois énoncés*