188. *Une caractérisation du principe du balayage pour un espace fonctionnel régulier*

Par Masayuki ITÔ
Institut Mathématique d'Université de Nagoya

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M. J. A., May 12, 1971)

1. Soient X un espace localement compact et à base dénombrable et ξ une mesure de Radon positive et partout dense dans X. A. Beurling et J. Deny ont défini un espace fonctionnel régulier H relatif à X et à ξ (cf. [1] et [2]). Nous utilisons ici les mêmes terminologies que dans leur article [1]. Nous supposons, dans cette note, que tout l'élément de H est à valeurs réelles. On dit que H est à noyau positif si tout le potentiel pur de H est non-négatif et que H satisfait au principe du balayage si, pour un ouvert ω de X et pour un potentiel pur u_μ de H, il existe un potentiel pur $u_{\mu'}$ de H, tel que μ' soit portée par $\overline{\omega}$ et que l'on ait $u_\mu \geqq u_{\mu'}$ et $u_\mu = u_{\mu'}$ ξ-presque partout dans ω.

Notons C_K l'espace des fonctions numériques, continues dans X et à support compact. Pour un ouvert Ω de X, H_Ω désigne l'adhérent de l'ensemble $\{\varphi \in H \cap C_K\,;\, S(\varphi) \subset \Omega\}$, où $S(\varphi)$ désigne le support de φ. Alors H_Ω est un sous-espace fermé de H et un espace fonctionnel régulier relatif à Ω et à ξ.

En généralisant le résultat de I. Higuchi concernant l'espace fonctionnel associé au noyau besselien dans l'espace euclidien $R^n (n \geqq 1)$, on obtiendra le théorème suivant:

Théorème. *Soit H un espace fonctionnel régulier relatif à X et à ξ; alors les deux énoncés sont équivalents:*

(1) *Quel que soit Ω un ouvert de X, H_Ω est à noyau positif.*

(2) *H satisfait au principe du balayage.*

2. J. Deny a défini la capacité relative à un espace fonctionnel régulier H, qui est une généralisation immédiate de la capacité classique (cf. [2]). Il a montré que si H est à noyau positif, tout l'ensemble analytique de X est capacitable. On connaît aussi, d'après [1] et [2], qu'à une fonction u de H, on peut associer un raffinement u^* de u et que, quel que soit a un nombre réel, l'ensemble $\{x \in X\,;\, u^*(x) \geqq a\}$ est capacitable par rapport à la capacité relative à H.

Lemme 1. *Soit H un espace fonctionnel régulier à noyau positif; alors, pour un ouvert Ω de X et pour un potentiel pur u_μ de H et avec $S(\mu) \subset \Omega$, il existe le potentiel pur u_μ^Ω de H_Ω et on a $u_\mu^\Omega = u_\mu - (u_\mu)'$, où $(u_\mu)'$ est la projection de u_μ sur le sous-espace fermé*

$$H'_\Omega = \overline{\{u_{\mu_1} - u_{\mu_2} \in H\,;\, S(\mu_i) = \complement\Omega,\ \mu_i \geqq 0 \quad (i=1,2)\}}.$$