169. Sur les Groupes Factorisables par Deux 2-Groupes Cycliques. II

(Cas où leur groupe des commutateurs n'est pas cyclique)

Par Noboru ITÔ et Akiko ÔHARA

(Comm. by K. SHODA, M.J.A., Dec. 13, 1956)

1. Nous allons considérer la structure d'un groupe factorisable G par deux 2-groupes cycliques A, B dont le groupe des commutateurs G' n'est pas cyclique. Désignons par a, b deux générateurs de A, B respectivement. Soient $2^\alpha, 2^\beta$ les ordres de A, B respectivement.

Théorème 1. *Soit G un groupe factorisable par deux 2-groupes cycliques A, B. Si son groupe des commutateurs G' n'est pas cyclique, G' est produit de $\{(a, b)\}$ et A_d ou de $\{(a, b)\}$ et B_d, où $\{(a, b)\}$ est un sous-groupe cyclique engendré par un commutateur (a, b), et où A_d, B_d sont des sous-groupes propres de A, B respectivement tels que A_d, B_d sont des sous-groupes distingués de G.*

Désignons par A_e un maximal sous-groupe propre de A tel que A_e est un sous-groupe distingué de G [1]. Soit $G' \frown A_e = A_d$, (si $G' \frown A_e = 1$, prenons $B_d = G' \frown B_e$) et soit d son générateur. Il est clair que $G' \supseteqq \{(a, b)\} A_d$. Comme G' est engendré par tous les éléments de la forme (a^i, b^j) [2], pour montrer que $G' \subseteqq \{(a, b)\} A_d$ il suffit de montrer que $(a^i, b^j) \in \{(a, b)\} A_d$, où $1 \leqq i \leqq 2^\alpha$, $1 \leqq j \leqq 2^\beta$. Nous le démontrons par récurrence doublée sur i, j. Il est évident pour $i=1$, $j=1$. Supposons que $(a, b^j) \in \{(a, b)\} A_d$ et que $(a, b^j) = (a, b)^f d^g$. Alors on a, en considérant que A_d est un sous-groupe distingué de G,

$$\begin{aligned}(a, b^{j+1}) &= ab^{j+1}a^{-1}b^{-j-1} \\ &= (a, b)b(a, b^j)b^{-1} \\ &= (a, b)b(a, b)^f d^g b^{-1} \\ &= (a, b)\{b(a, b)b^{-1}\}^f d^{g'} \\ &= (a, b)\{(a, b)^h d^k\}^f d^{g'} \\ &= (a, b)^{f'} d^{g''}.\end{aligned}$$

Cela signifie que $(a, b^{j+1}) \in \{(a, b)\} A_d$ et alors que $(a, b^n) \in \{(a, b)\} A_d$ pour un nombre arbitraire n. (Il est évident que $b(a, b)b^{-1} = (a, b)^{-1}(a, b^2)$ et $a(a, b)a^{-1} = (a^2, b)(a, b)^{-1}$.) Supposons que $(a^i, b^n) \in \{(a, b)\} A_d$ et $(a^i, b^n) = (a, b)^l d^m$. On a

$$\begin{aligned}(a^{i+1}, b^n) &= a^{i+1}b^n a^{-i-1}b^{-n} \\ &= a(a^i, b^n)a^{-1}(a, b^n) \\ &= a(a, b)^l d^m a^{-1}(a, b)^h d^k \\ &= \{a(a, b)a^{-1}\}^l d^{m'}(a, b)^h d^k \\ &= \{(a, b)^{h'} d^{k'}\}^l d^{m'}(a, b)^h d^k \\ &= (a, b)^{l'} d^{m''}.\end{aligned}$$