4. L'Intégrale de Denjoy et l'Intégration au Moyen des Espaces Rangés. II

Par Shizu NAKANISHI

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Jan. 12, 1957)

Continuons la démonstration du Théorème 4 de la Note I.[1] Pour cela, remarquons d'abord que, si I_i $(i=1,2,\cdots,i_0)$ est un système élémentaire tel que $I_i\cap F^*_{2n+1}\neq 0$ pour tout i, on a $\sum_{i=1}^{i_0}\left|\int_{I_i} r_{2n+1}(x)dx\right|<2^{-(2n+2)}$ En effet, puisque $F^*_{2n+1}=F_n$, on a $I_i\cap F_n\neq 0$ pour tout i. On a donc, selon 3), $\sum_{i=1}^{i_0}\left|(D)\int_{I_i} f(x)\,dx-\int_{I_i\cap F_n} f(x)\,dx\right|<2^{-(2n+4)}$ Puisque F_n est contenu dans F_{n+1}, on a $I_i\cap F_{n+1}\neq 0$ pour tout i. On a donc $\sum_{i=1}^{i_0}\left|(D)\int_{I_i} f(x)\,dx-\int_{I_i\cap F_{n+1}} f(x)\,dx\right|<2^{-(2(n+1)+4)}$ Conséquemment, il en résulte que $\sum_{i=1}^{i_0}\left|\int_{I_i} t_{n+1}(x)\,dx\right|=\sum_{i=1}^{i_0}\left|\int_{I_i\cap(F_{n+1}-F_n)} f(x)\,dx\right|=\sum_{i=1}^{i_0}\left|\int_{I_i\cap F_{n+1}} f(x)\,dx-\int_{I_i\cap F_n} f(x)\,dx\right|<2^{-(2n+4)}+2^{-(2n+6)}<2^{-(2n+3)}$ Donc, $\sum_{i=1}^{i_0}\left|\int_{I_i} r_{2n+1}(x)\,dx\right|=\sum_{i=1}^{i_0}\left|\int_{I_i} t^{n+1}_{n+1}(x)\,dx\right|\leq\sum_{i=1}^{i_0}\int_a^b\left|t_{n+1}(x)-t^{n+1}_{n+1}(x)\right|dx+\sum_{i=1}^{i_0}\left|\int_{I_i} t_{n+1}(x)dx\right|<2^{-((n+1)+2(n+1)+4)}+2^{-(2n+3)}<2^{-(2n+2)}$

Observons maintenant que la suite $u=\{u_n\}$, $u_n=V(F^*_n,\ \nu_n;\ f_n)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ est une suite fondamentale qui jouit de la propriété P'. D'abord, nous allons montrer que la suite u est monotone décroissante. Il est facile de voir qu'on a $V(F^*_{2n},\ \nu_{2n};f_{2n})\supseteq V(F^*_{2n+1},\ \nu_{2n+1};f_{2n+1})$. Il suffit donc de voir qu'on a $V(F^*_{2n},\ \nu_{2n+1};f_{2n})\supseteq V(F^*_{2n+2},\ \nu_{2n+2};f_{2n+2})$. Soit $g(x)$ une fonction quelconque dans $V(F^*_{2n+2},\ \nu_{2n+2};\ f_{2n+2})$. Alors, la fonction $g(x)$ s'écrit $f_{2n+2}(x)+p(x)+r(x)$, où $p(x)$, $r(x)$ sont des fonctions en escalier satisfaisant aux conditions [1], [2] et [3]. Puisque la fonction $f_{2n+2}(x)$ s'écrit $f_{2n+1}(x)+p_{2n+1}(x)+r_{2n+1}(x)$, $g(x)$ peut s'écrire de plus $f_{2n+1}(x)+(p(x)+p_{2n+1}(x))+(r(x)+r_{2n+1}(x))$. Mais, on voit de plus que $p(x)+p_{2n+1}(x)$ et $r(x)+r_{2n+1}(x)$ possèdent les propriétés suivantes: [1] $r(x)$ s'annule pour tout $x\in F^*_{2n+1}$ puisque $F^*_{2n+1}\subseteq F^*_{2n+2}$. $r_{2n+1}(x)$ s'annule pour tout $x\in F^*_{2n+1}$ puisque $r_{2n+1}(x)=t^{n+1}_{n+1}(x)$. Par suite, $r(x)+r_{2n+1}(x)$ s'annule pour tout $x\in F^*_{2n+1}$; [2] On a, pour tout $n=1,2,\cdots$, $\int_a^b |\,p_{2n+1}(x)\,|\,dx\leq\int_a^b |\,s_{n+1}(x)-s_n(x)\,|\,dx+\sum_{m=1}^{n}\int_a^b |\,t^m_{n+1}(x)-t^m_n(x)\,|\,dx$

1) Shizu Nakanishi: L'intégrale de Denjoy et l'intégration au moyen des espaces rangés. I, Proc. Japan Acad., **32**, 678–683 (1956).