159. Le Problème de Cauchy pour le Passé pour Quelques Équations Paraboliques

Par Sigeru MIZOHATA
Université de Kyôto

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Dec. 12, 1958)

1. *Introduction.* On va envisager les équations anti-paraboliques de la forme:

$$\left(\frac{d}{dt}+\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i}+c(x,t)\right)u(x,t)=0 \tag{1,1}$$

où les coefficients $a_{ij}(x,t)$ sont à valeurs réelles, et

$$\sum a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \delta^2|\xi|^2,\ \delta>0,\ \text{pour } x\in R^n,\ 0\leq t\leq h. \tag{1,2}$$

Notre but est de démontrer que l'équation d'évolution (1,1) a *au plus* une solution pour le problème de Cauchy pour l'avenir.[1] Ce résultat est une conséquence immédiate de [7]. Notre résultat est limité à l'équation (1,1), et pour des équations paraboliques plus générales, la question est hors de notre portée.

2. Pour simplifier le raisonnement, on suppose que les coefficients $a_{ij}(x,t)$ sont des fonctions continuement différentiables en t à valeurs dans $\mathcal{B}$;[2] les autres coefficients sont mesurables et bornés. D'après le lemme de Gårding (voir [4, pp. 123–126]), il existe une constante $\beta>0$ telle que,

$$\|(A(x,t,D)-\beta)u\|_{L^2}\geq \frac{\delta}{2}\|(1-\Delta)u\|_{L^2} \tag{2,1}$$

pour toute $u(x)\in\mathcal{D}^2_{L^2}$, où $A(x,t,D)=\sum a_{ij}(x,t)\dfrac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}$, $0\leq t\leq h$.

(1,1) deviendra alors, en désignant

$$\sigma(P(t))=A(x,t,iz)|z|^{-2}, \tag{2,2}$$

$$\frac{d}{dt}u(t)+(P(t)\Lambda^2-\beta)u(t)=B(u). \tag{2,3}$$

On a alors (voir [7, Lemme 2,1]) le

Lemme 2,1. *Soit $u(t)$, $0\leq t\leq h$, une fonction continuement différentiable en t à valeurs dans L^2 telle que $\Lambda^2u(t)$ soit continue.*[3] *On suppose que $u(t)$ s'annule à $t=0$ mais ne s'annule identiquement dans*

1) Dans le cas où les coefficients sont indépendants de t, ce problème est résolu par K. Yosida [8], voir aussi [1].

2) Pour le Théorème, on n'a qu'à supposer $\mathcal{B}^3$ au lieu de $\mathcal{B}$; $\mathcal{B}^3$ est l'espace des fonctions 3 fois continuement différentiables bornées avec leurs dérivées jusqu'à l'ordre 3, muni de la norme: $\sum_{|\alpha|\leq 3}\sup_x|D^\alpha f(x)|$.

3) Cela équivaut à dire que toutes les dérivées spatiales de $u(t)$ d'ordre≤ 2, sont continues en t à valeurs dans L^2.