36. *Sur le Théorème de Fubini et les Suites Fondamentales*

Par Shizu NAKANISHI

Université d'Osaka

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., April 13, 1959)

Dans cette Note, nous montrerons surtout deux propositions suivantes:

Proposition 1. *Soit* $u=\{u_n\}$, $u_n=V(F_n, \nu_n; f_n)$, *une suite fondamentale définie dans l'intervalle* $I_0=[a, b; c, d]$ *d'espace euclidien de deux dimensions*[1] *et qui satisfait à la condition suivante:*

On peut poser, pour tout n $(n=0, 1, 2, \cdots)$,

$$f_{n+1}(x, y)=f_n(x, y)+p_n(x, y)+r_n(x, y),$$

où $p_n(x, y)$, $r_n(x, y)$ *sont des fonctions en escalier satisfaisant, outre qu'elles satisfont aux conditions* [1], [2] *et* [3], *à la condition suivante* (*).[2]

(*) *Pour tout système de nombre fini d'intervalles* I_i $(i=1, 2, \cdots, i_0)$ *sans points commun deux à deux tels que* $I_i=[a\leq x\leq b]\times J_i$, *où* J_i *sont des intervalles contenus dans l'intervalle* $[c\leq y\leq d]$, *si les extrémités de* J_i *appartiennent à* $proj._y\, F_n$ *pour tout* i, *on a*

$$\sum_{i=1}^{i_0}\left|\iint_{I_i} r_n(x, y)\, dxdy\right|<2^{-\nu_n} \quad (n=0, 1, 2, \cdots).$$

Désignons par $f(x, y)$ *la fonction-limite de la suite* u. *Alors, on obtient deux résultats suivants:*

1) *Pour presque tout* y *de l'intervalle* $[c\leq y\leq d]$, *il existe une suite fondamentale* $u^y=[u_n^y]$ *définie dans l'intervalle* $[a\leq x\leq b]$ *et telle qu'une fonction-limite soit* $f(x, y)$, $a\leq x\leq b$, *et qu'une intégrale de la fonction déterminée par* u^y *coïncide avec la limite de la suite des intégrales lebesguiennes* $\int f_n(x, y)\, dx$.

2) *Supposons qu'il existe un indice* n_0 *tel que les points* $y=c$ *et* d *appartiennent à* $proj._y\, F_n$ *pour tout* $n\geq n_0$. *Alors, pour la fonction* $g(y)=\lim\limits_{n\to\infty}\int f_n(x, y)dx$, $c\leq y\leq d$, *il existe une suite fondamentale* $v=\{v_n\}$ *définie dans l'intervalle* $[c\leq y\leq d]$ *tell qu'une fonction-limite soit* $g(y)$ *et qu'une intégrale de la fonction* $g(y)$ *déterminée par* v *coïncide avec la limite de la suite des intégrales lebesguiennes* $\iint f_n(x, y)\, dxdy$.

---

1) Pour une définition, voir T. Ikegami: A note on the integration by the method of ranked spaces, Proc. Japan Acad., **34**, 16–21 (1958).

2) Voir la condition [3_2] définie dans la Note, S. Nakanishi: Sur la dérivation de l'intégrale (*E. R.*) indéfinie. I, Proc. Japan Acad., **34**, 199–204 (1958).