61. *Sur la Transformation de Fourier et la Dérivée Fonctionnelle*

Par Riichi IINO
Université de Waseda

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., May 13, 1961)

Dans cette note, nous allons définir la transformation de Fourier pour des fonctionnelles continues (non nécessairement linéaires) sur S (l'espace des fonctions à valeurs complexes sur R^n, indéfiniment dérivables au sens usuel à décroissance rapide ainsi que chacune de leurs dérivées, muni de la topologie définie par L. Schwartz[1]), et étudier une relation entre la transformation de Fourier et la dérivée fonctionnelle (dérivée faible[2]).

1. Transformation de Fourier. Rappelerons d'abord la transformation de Fourier des distributions tempérées définie par L. Schwartz.[3] Soit R^n_x (resp. R^n_y) l'espace vectoriel réel de dimension n dont $x=(x_1, x_2,\cdots,x_n)$ (resp. $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$) sera un point de R^n_x (resp. R^n_y). Désignerons par S_x (resp. S_y) l'espace S construit sur l'espace R^n_x (resp. R^n_y) et par S'_x (resp. S'_y) le dual fort de S_x (resp. S_y). La transformation de Fourier $\mathcal{F}_x$ d'une distribution $U\in S'_x$ est définie par la formule de Parseval:

$$\langle \mathcal{F}_x U, \varphi\rangle = \langle U, \mathcal{F}_y\varphi\rangle, \text{ pour tout } \varphi\in S_y, \tag{1}$$

le crochet $\langle\ ,\ \rangle$ désignant la dualité entre S et S', où $\mathcal{F}_y\varphi$ s'exprime l'integrale $\int_{R^n_y}\varphi(y)\exp(-2\pi ix\cdot y)\,dy$, $x\cdot y$ désignant le produit scalaire $x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$ (on suppose que R^n_x et R^n_y sont mis en dualité par $x\cdot y$). La conjuguée $\overline{\mathcal{F}}_y$ de $\mathcal{F}_x$ est définie par

$$\langle \overline{\mathcal{F}}_y V, \psi\rangle = \langle V, \overline{\mathcal{F}}_x\psi\rangle, \text{ pour } V\in S'_y \text{ et } \psi\in S_x, \tag{2}$$

où $\overline{\mathcal{F}}_x\psi=\int_{R^n_x}\psi(x)\exp(2\pi ix\cdot y)\,dx$. On sait le fait suivant trouvé par L. Schwartz:[4] La transformation de Fourier $\mathcal{F}_x$ et sa conjuguée $\overline{\mathcal{F}}_y$ établissent entre S'_x et S'_y deux isomorphismes réciproques (algébriques et topologiques).

On va maintenant définir la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ d'une fonctionnelle continue f définie sur S_x par une formule suivante:

---

1) L. Schwartz: Théorie des Distributions, **2**, Hermann, Paris (1951).

2) R. Iino: Sur les dérivations dans les espaces vectoriels topologiques sur le corps des nombres complexes. I, Proc. Japan Acad., **35**, no. 7, 343-348 (1959); Ibid. II, **35**, no. 9, 530-535 (1959); Ibid. III, **36**, no. 1, 27-32 (1960).
Nous noterons par (I), (II), (III) ces notes, respectivement.

3) Voir L. Schwartz: Loc. cit. 1), Chap. VII.

4) L. Schwartz: Loc. cit. 1), Théorème XIII.