4. *Sur l'intégrale* (A) *et l'intégrale* (E.R.)

Par Hatsuo OKANO
Université d'Osaka

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., Jan. 12, 1965)

Pour intégrer la fonction conjuguée d'une fonction sommable, MM. E. C. Titchmarsh et A. Kolmogoroff ont introduit la notion de l'intégrale (A).[1] Une fonction $f(x)$ est dite intégrable (A) sur un intervalle fini $[a, b]$ si elle satisfait aux conditions suivantes:

(A_1) $\mathrm{Mes}\,(\{x;\ |f(x)| > n\})$[2] $= o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

(A_2) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_a^b [f(x)]_n dx$ existe, où $[f(x)]_n = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| \leqq n \\ 0 & \text{si } |f(x)| > n. \end{cases}$

La valeur limite (A_2) est désignée par $(A)\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

D'autre part, utilisant la méthode de la complétion de l'espace rangé, Prof. K. Kunugi a défini indépendamment une intégrale singulière qui s'appelle l'intégrale $(E.R.)$.[3] Et, plus tard, MM. I. Amemiya et T. Andô ont démontré que l'intégrabilité $(E.R.)$ d'une fonction $f(x)$ est équivalente aux conditions (A_1), (A_2) et son intégrale est égale à la valeur limite (A_2), c'est-à-dire que l'intégrale $(E.R.)$ est identique à l'intégrale (A).[4]

Or, cette intégrale est une généralisation de celle de Lebesgue. Mais, de la condition (A_1), la fonction $\dfrac{1}{x}$, par exemple, n'est pas intégrable sur l'intervalle $[-1, 1]$. Donc, nous désirons élargir la portée de l'intégration.

Pour cela, Prof. K. Kunugi a montré que, par la méthode de changement de la variable, nous pouvons définir une telle intégrale.[5] Nous désignons une intégrale de cette sorte par $(E.R.\ \nu)\displaystyle\int_a^b f(x)dx$,

---

1) E. C. Titchmarsh: On conjugate functions. Proc. London Math. Soc., **29**, 49-80 (1929); A. Kolmogoroff: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin (1933); Ju. S. Očan: L'intégrale généralisée (en russe), Mat. Sb. **28**, 293-336 (1951).

2) $\mathrm{Mes}\,(E)$ désigne la mesure lebesguienne d'ensemble E.

3) K. Kunugi: Application de la méthode des espaces rangés à la théorie de l'intégration. I. Proc. Japan Acad., **32**, 215-220 (1956).

4) I. Amemiya and T. Andô: Measure-theoretic singular integral (en japonais, avec un sommaire anglais). Bull. Res. Inst. App. El., Hokkaido University, **13**, 33-50 (1961).

5) K. Kunugi: Sur une généralisation de l'intégrale, Fundamental and Applied Aspects of Math. Mon. Ser. Res. Inst. App. El., Hokkaido University, **7**, 1-30 (1959).