18. *Certains espaces de fonctions à valeurs vectorielles*

Par Kôzô YABUTA

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M. J. A., Feb. 12, 1969)

En ce qui concerne les espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles et l'espace de distributions à valeurs vectorielles, beaucoup de faits sont déjà connus (L. Schwartz [3] et [4]). L'espace de fonctions de puissance p-ème sommabls à valeurs vectorielles a été considéré relativement à la théorie de produits tensoriels topologiques (A. Grothendieck [1], L. Schwartz [5]). Dans cet article nous étudierons l'espace de fonctions carré-sommables à valeurs dans un espace vectoriel topologique séparé semi-complet E dans le cadre de la théorie des distributions à valeurs vectorielles. Et nous construirons l'espace $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega, E)$ qui est un analogue naturel de $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ et nous déduirons quelques propriétés de $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega, E)$. Les résultats principaux sont donnés à la proposition 1 et aux théorèmes 1, 2, 3. Comme la topologie de $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega, E)$ est plus visible que la topologie tensorielle la moins fine sur $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)\otimes E$, il nous a paru utile de construire l'espace $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega, E)$ exactement.

1. Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe séparé semi-complet. Soit $\{q_i\}_{i\in I}$ une famille de semi-normes définissant la topologie de E. Et soit Ω un ouvert de R^n. *On dit qu'une fonction $\vec{f}$, définie presque partout sur Ω à valeurs dans E, définit une distribution sur Ω à valeurs dans E, si $\vec{f}$ est scalairement localement sommable, c.à.d. si $\langle\vec{f}, e'\rangle$ est localement sommable pour tout $e'\in E'$, et si l'application linéaire $e'\to\langle\vec{f}, e'\rangle$ est continue de E'_c[1] dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.* Pour que 2 fonctions $\vec{f}$, $\vec{g}$, définissent la même distribution, il faut et il suffit qu'elles soient scalairement presque partout égales. Voici un résultat de M. L. Schwartz:

Lemme 1. *Pour qu'une fonction $\vec{f}$, définie p.p. sur Ω à valeurs dans E, et scalairement localement sommable, définisse une distribution à valeurs dans E, il faut et il suffit que, pour toute $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$, l'intégrale faible $\int_\Omega \vec{f}(x)\varphi(x)dx$ de E'^* soit dans E.*

Introduisons l'espace $\mathcal{E}^m(\Omega, E)$; l'espace des fonctions $\vec{f}$ m fois continuement différentiables sur Ω à valeurs dans E, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de Ω pour $\vec{f}$ et chacune de ses dérivées d'ordre$\leq m$. $\mathcal{E}^m(\Omega, E)$ est semi-complet si E

*) Nous utiliserons systématiquement les notations de L. Schwartz, [3] et [4].

1) E'_c est le dual de E muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties convexes équilibrées compactes de E.