56. *Remarque sur la somme des résolvantes*

Par Masayuki ITO
Institut Mathématique d'Université de Nagoya

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M. J. A., March 12, 1970)

1. Soit X un groupe abélien localement compact, et on désigne par dx sa mesure de Haar. Rappelons qu'un noyau de Dirichlet κ sur X est une mesure de Radon positive dans X et dont la transformation de Fourier est de la forme $\hat{\kappa}=1/\lambda$, où λ est une fonction définie-négative sur le groupe dual $\hat{X}$ de X, à valeurs réelles et telle que $1/\lambda$ soit localement sommable (cf. [1]). Une fonction λ complexe et continue sur $\hat{X}$ est dite d'être définie-négative si, quel que soit m un entier >0 et quel que soit $(\hat{x}_i)_{i=1}^m$ un système de $\hat{X}$, la forme quadratique

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}[\lambda(\hat{x}_i)+\overline{\lambda(\hat{x}_j)}-\lambda(\hat{x}_i-\hat{x}_j)]\rho_i\bar{\rho}_j \tag{1}$$

est non-négative.

On connaît qu'à un noyau de Dirichlet κ sur X, on peut associer une famille $(\kappa_p)_{p\geqq 0}$ des noyaux de Dirichlet sur X, et une seule telle que l'on ait $\kappa_0=\kappa$ et, quels que soient $p, q>0$,

$$\kappa_p-\kappa_q=(q-p)\kappa_p*\kappa_q, \tag{2}$$

qui s'appelle la résolvante associée à κ.

Continuant la recherche sur la somme des noyaux de Dirichlet (cf. [3]), on se propose ici de montrer le théorème suivant:

Théorème. *Soit κ un noyau de Dirichlet sur X, et soit $(\kappa_p)_{p\geqq 0}$ la résolvante associée à κ, alors l'application $p\to\kappa_p$ est vaguement continue et, pour une mesure positive $\mu(\neq 0)$ sur $[0, \infty)$ et avec $\int d\mu<+\infty$, $\kappa_\mu=\int\kappa_p d\mu(p)$ est aussi un noyau de Dirichlet sur X.*

Il en résultera immédiatement que la somme des noyaux de Yukawa est un noyau de Dirichlet.

2. Démonstration du théorème. Cela résultera du lemme suivant:

Lemme. *Soit λ une fonction définie-négative sur $\hat{X}$ et à valeurs réelles. Pour deux systèmes $(p_i)_{i=1}^m$ et $(a_i)_{i=1}^m$ de nombres $\geqq 0$ avec $\sum_{i=1}^m a_i=1$, on pose*

$$\lambda_m(\hat{x})=\frac{1}{\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i}{p_i+\lambda(\hat{x})}}. \tag{3}$$

Elle est aussi définie-négative sur $\hat{X}$, et il existe une mesure de Radon positive σ_m symétrique sur X, avec $\int d\sigma_m<+\infty$ et telle que