50. *Über einfache Halbgruppen mit minimalen Rechtsidealen*

Von Daniel M. FLACH und Hans J. HOEHNKE
Math. Inst., deutsch. Akad. Wiss., Berlin-Adlershof, D. D. R.

(Comm. by Kenjiro SHODA, M. J. A., March 12, 1970)

Satz. *Eine* [0-] *einfache Halbgruppe* S *mit* [0-] *minimalen Rechtsidealen und mit Maximalbedingung für Rechtskongruenzen ist* [0-] *direkt zerlegbar in endlich viele* [0-] *minimale Rechtsideale, die als* S*-Systeme paarweise isomorph sind. Der Zentralisator jedes* [0-] *minimalen Rechtsideals ist eine* [0-] *Gruppe.*

Beweis. S ist die Vereinigung $S=\bigcup_R R$ aller [0-] minimalen Rechtsideale R von S (vergl. zum Beispiel Lemma 8.21 aus [1] oder Theorem 12.4 aus [3]). Ist R ein solches Rechtsideal, so gilt überdies $S=SR=\bigcup_{s\in S} sR$, wo sR homomorphes Bild von R und entweder gleich $\{0\}$ oder [0-] minimal ist. Jedes [0-] minimale Rechtsideal T von S hat die Form $T=sR$, und $\varphi_s: R\to T$ mit $\varphi_s(r)=sr$ für alle $r\in R$ ist ein Homomorphismus von R auf T.

Bezeichnet FR die Menge der Fixelemente von R bezüglich S (hier ist $|FR|\leq 1$) und μ_s die zu einem Element $s\in S$ assoziierte Rechtskongruenz von S, $\mu_s=\{(a, b)\in S\times S, sa=sb\}$, so hat man

$$R=rS\cong S/\mu_r \quad \text{für} \quad r\in R\backslash FR.$$

Sei $\varphi: R\to T$ irgendein S-Homomorphismus von R auf T und $\varphi(r)=t$. Dann ist $\varphi(rs)=\varphi(r)s=ts$, $\varphi(R)=tS=T$, also $t\in T\backslash FT$ und $T=tS\cong S/\mu_t$. Da φ eindeutig ist, so gilt für alle $a, b\in S$ die Implikation $ra=rb\Rightarrow ta=tb$, d.h. $\mu_r\subseteq\mu_t$. Nach Voraussetzung können R und $r\in R\backslash FR$ so gewählt werden, daß μ_r möglichst groß wird. Dann gilt $\mu_r=\mu_t$, d.h., φ ist ein Isomorphismus. Insbesondere ist jeder Endomorphismus von R, der nicht der Nullendomorphismus ist, ein Automorphismus des S-Systems R.

Wie B. M. Šaĭn bemerkt hat, folgt aus der Maximalbedingung unmittelbar, daß S nur endlich viele verschiedene [0-] minimale Rechtsideale enthält (denn sind $R_1, R_2, \cdots$ [0-] minimale Rechtsideale, so bricht die aufsteigende Kette $R_1\subseteq R_1\cup R_2\subseteq\cdots$ nach endlich vielen Schritten ab).

Literatur

[1] A. H. Clifford and G. B. Preston: The Algebraic Theory of Semigroups, Vol. II, Math. Surveys, No. 7. Amer. Math. Soc., Providence, R. I. (1967).
[2] D. M. Flach: Eine Art von halbgruppentheoretischem Wedderburnsatz (unveröffentlichtes Manuskript).
[3] H. J. Hoehnke: Structure of semigroups. Canad. J. Math., **18**, 449–491 (1966).