69. *Sur la transformation homogène du noyau de Dirichlet*

Par Yoshifusa ITO
Département de Physiologie, Université de Nagoya

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M. J. A., March 12, 1971)

Soit $x \to Tx$ un isomorphisme de l'espace euclidien R^n à $n(\geqq 3)$ dimensions sur lui-même et qui applique un noyau positivement homogène à un noyau positivement homogène du même ordre. Alors, pour que l'isomorphisme applique la classe des noyau de Dirichlet dans elle-même, il faut et il suffit que T soit linéaire. Il se basera sur le fait qu'un noyau de Dirichlet homogène d'ordre $2-n$ est à niveau elliptique.

1. Préliminaire. Un noyau elliptique sur R^n est, par définition, symétrique et à niveau elliptique. S'il existe un nombre α tel que $k(ax) = a^\alpha k(x)$ pour $a(>0)$, on dit que $k(x)$ est positivement homogène d'ordre α. Soit $x \to Tx$ un isomorphisme de R^n sur lui-même et tel que, pour un noyau $k(x)$ positivement homogène, $k(Tx)$ soit un noyau positivement homogène du même ordre. En ce moment, on dit que T est homogène.

Notre méthode se basera sur le théorème de Lévy-Khinchin [1]. D'après le théorème, pour que $k(x)$ soit un noyau de Dirichlet [2], it faut et il suffit que l'on puisse écrire

$$\hat{k}(y) = \frac{1}{a + \Sigma b_{ij} y_i y_j + \int (1 - e^{2\pi i y \cdot z}) d\sigma(z)}, \tag{1}$$

où le second membre est localement sommable. Les signes $\wedge$ et $\cdot$ représentent respectivement la transformation de Fourier sur R^n et le produit intérieur, a est une constante non-négative, (b_{ij}) une matrice définie-positive, et σ est une mesure de Radon positive dans $R^n - \{0\}$ et telle que

$$\int \frac{|z|^2}{1+|z|^2} d\sigma(z) < +\infty.$$

La décomposition (1) est uniquement déterminée.

2. Noyaux elliptiques. On va, d'abord, préparer le lemme suivant.

Lemme 1. *Soit k un noyau positivement homogène d'ordre $\alpha - n$, $\hat{k}$, la transformation de Fourier de k, est alors un noyau positivement homogène d'ordre $-\alpha$.*

En effet,

$$\hat{k}(ay) = \int e^{2\pi i x \cdot a y} k(x) dx = \frac{1}{a^\alpha} \hat{k}(y) \qquad \text{pour } a(>0).$$

On peut affirmer que si k est un noyau elliptique homogène d'ordre