87. *Représentations unitaires du groupe modulaire*

Par Masahiko SAITO

(Comm. by Kunihiko KODAIRA, M. J. A., June 2, 1972)

On construit une infinité de séries à un paramètre continu de représentations unitaires irréductibles de dimension infinie du groupe modulaire $G=SL(2,\boldsymbol{Z})$. L'exposé détaillé avec démonstrations paraîtra ultérieurement.

1. Soit Δ zéro ou un nombre rationnel positif et non carré. Ecrivons $\Delta=m/n$ où m et n sont des entiers relativement premiers, $m\geqslant 0$, $n>0$. Soit $H(\Delta)$ le sous-groupe de G formé des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & mb \\ nb & a \end{pmatrix}$, $a^2-mnb^2=1$. $H(\Delta)$ est un groupe infini commutatif, isomorphe à $\boldsymbol{Z}\times\{\pm 1\}$. Choisissons un caractère χ ($=$représentation unitaire unidimensionnelle) de $H(\Delta)$, et notons par $U(\Delta,\chi)$ la représentation unitaire de G induite de χ.

Appelons Δ de $(-)$-catégorie si l'équation $x^2-mny^2=-1$ admet une solution entière, et de $(+)$-catégorie sinon (0 est de $(+)$-catégorie).

Théorème 1. a) *Si Δ est de $(+)$-catégorie, $U(\Delta,\chi)$ est irréductible.*

b) *Si Δ est de $(-)$-catégorie et si $\chi^2\neq 1$, $U(\Delta,\chi)$ est irréductible.*

c) *Si Δ est de $(-)$-catégorie et si $\chi^2=1$, $U(\Delta,\chi)$ se décompose en somme directe de deux représentations irréductibles.*

2. Prenons une section Θ sur $H\backslash G$ dans G: tout élément $g\in G$ s'écrit d'une seule façon sous la forme $\rho(g)\cdot\theta(g)$, $\rho(g)\in H$, $\theta(g)\in\Theta$.

Soient $F=F(\Delta)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\Delta \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(\Delta)$ l'ensemble des matrices ${}^tgFg$, $g\in G$. Pour X dans $\boldsymbol{X}$, $-X$ appartient à $\boldsymbol{X}$ si et seulement si Δ est de $(-)$-catégorie. $H(\Delta)$ est la totalité de $g\in G$ tel que ${}^tgFg=F$. Par conséquent, Θ et $\boldsymbol{X}$ sont dans une correspondance biunivoque $\theta\leftrightarrow{}^t\theta F\theta$. Pour $X\in\boldsymbol{X}$, écrivons $\theta(X)$ le seul élément θ dans Θ tel que ${}^t\theta F\theta=X$.

La représentation $U(\Delta,\chi)$ se réalise dans $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}(\Delta)=l^2(\boldsymbol{X})$: pour $\varphi\in\mathfrak{H}$, $g\in G$ et $X\in\boldsymbol{X}$,

$$U(\Delta,\chi\,;g)\varphi(X)=\chi(\rho(\theta(X)\cdot g))\varphi({}^tgXg).$$

3. Soit $H^-(\Delta)$ l'ensemble des matrices dans G de la forme $\begin{pmatrix} a & -mb \\ nb & -a \end{pmatrix}$, $a^2-mnb^2=-1$, et posons $\tilde{H}(\Delta)=H(\Delta)\cup H^-(\Delta)$. Si Δ est de $(+)$-catégorie, $\tilde{H}(\Delta)=H(\Delta)$. Si Δ est de $(-)$-catégorie, $\tilde{H}(\Delta)$ est un sous-groupe de G dans lequel $H(\Delta)$ est d'indice 2. $H^-(\Delta)$ est la totalité