143. *Représentations unitaires du groupe modulaire. II*

Par Masahiko SAITO

(Comm. by Kunihiko KODAIRA, M. J. A., Nov. 13, 1972)

On généralise et améliore les résultats dans la note précédente [1].

1. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des formes quadratiques binaires $\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$, où a, b, c sont des entiers relativement premiers et le discriminant $d=b^2-4ac$ est zéro ou positif non carré. Soit G le groupe $GL(2, \boldsymbol{Z})$. Pour $g \in G$ et $X \in \mathcal{F}$, posons $X^g=(\det g)^{-1}\, {}^t gXg$.

Choisissons une forme F dans $\mathcal{F}$ et appelons $H(F)$ le sous-groupe de G formé des éléments h tels que $F^h=F$. On a

$$H(F)=\left\{\begin{pmatrix} \dfrac{t-bs}{2} & -cs \\ as & \dfrac{t+bs}{2} \end{pmatrix}; t,\ s \in \boldsymbol{Z},\ t^2-ds^2=\pm 4\right\}$$

et $H(F)$ est isomorphe à $\boldsymbol{Z} \times \{\pm 1\}$.

On dira que F est de la 1^{re} espèce s'il existe un $k \in G$ tel que $F^k=-F$ et est de la 2^{e} espèce sinon. Les deux espèce sont des ensembles infinis.

2. Choisissons un caractère χ de $H(F)$ et désignons $U(F, \chi)$ la représentation unitaire de G induite de χ. Posons $\chi^*(h)=\chi((\det h)h^{-1})$ pour $h \in H(F)$.

Théorème 1. a) *Si F est de la 1^{re} espèce et si $\chi \neq \chi^*, U(F, \chi)$ est irréductible.*

b) *Si F est de la 1^{re} espèce et si $\chi=\chi^*$, $U(F, \chi)$ se décompose en somme directe de deux représentations irréductibles $U^{\pm}(F, x)$.*

c) *Si F est de la 2^{e} espèce, $U(F, \chi)$ est irréductible.*

Prenons une section Θ sur $H(F)\backslash G$ dans G: tout élément $g \in G$ s'écrit d'une seule façon sous la forme $g=\rho(g)\cdot\theta(g)$, où $\rho(g) \in H(F)$ et $\theta(g) \in \Theta$.

Soit $\mathcal{X}(F)=\{F^g\,;\, g \in G\}$. Alors la représentation $U(F, \chi)$ se réalise dans l'espace hilbertien $\mathcal{H}(F)=l^2(\mathcal{X}(F))$: pour $g \in G$, $\varphi \in \mathcal{H}(F)$ et $X \in \mathcal{X}(F)$,

$$U(F, \chi\,;\, g)\varphi(x)=\chi(X, g)\varphi(X^g)\,;$$

où $\chi(X, g)=\chi(\rho(\theta g))$, $X=F^\theta$, $\theta \in \Theta$.

3. Théorème 2. a) *Pour F de la 1^{re} espèce, $U(F, \chi)$ et $U(F, \chi')$ sont équivalentes si et seulement si $\chi'=\chi$ ou $\chi'=\chi^*$.*

b) *Pour F de la 2^{e} espèce, $U(F, \chi)$ et $U(F, \chi')$ sont équivalentes si et seulement si $\chi'=\chi$.*