156. *Comparaison des 2-groupes des classes d'idéaux au sens large et au sens étroit d'un corps quadratique réel*

Par Pierre KAPLAN*)

(Comm. by Kenjiro SHODA, M. J. A., Nov. 12, 1974)

Introduction. Soit D un entier sans diviseur carré. Deux idéaux fractionnaires $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$ du corps $\boldsymbol{Q}(\sqrt{D})$ sont équivalents au sens large s'il existe un nombre λ de $\boldsymbol{Q}(\sqrt{D})$ tel que $\mathfrak{a}=\lambda\mathfrak{a}'$. Si la norme de λ est un nombre positif, $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$ sont équivalents au sens étroit. Ces deux notions coïncident si le corps $\boldsymbol{Q}(\sqrt{D})$ est imaginaire ($D<0$), ou si $\boldsymbol{Q}(\sqrt{D})$ est réel ($D>0$) et si la norme de son unité fondamentale est -1.

Si au contraire, ce que nous supposons dans tout ce travail, le corps $\boldsymbol{Q}(\sqrt{D})$ est réel et les normes de ses unités positives, c'est-à-dire si D est positif et si l'équation $x^2-Dy^2=-1$ n'a pas de solution en nombres entiers rationnels, chaque classe d'idéaux au sens large se décompose en deux classes au sens étroit. En particulier la classe des idéaux principaux au sens large est formée de la classe I des idéaux principaux engendrés par un nombre de norme positive et de la classe J des idéaux principaux engendrés par un nombre de norme négative. La classe I est la classe unité du groupe (C^*) des classes d'idéaux au sens strict et le groupe $(C^{*\prime})$ des classes d'idéaux au sens large est isomorphe au quotient de (C^*) par le sous-groupe P^* formé de I et de J.

Soient R_n et R'_n les 2^n rangs de (C^*) et de $(C^{*\prime})$, c'est-à-dire les nombres de cycles d'ordre 2^k avec $k\geqslant n$ dans toute décomposition de (C^*) et de $(C^{*\prime})$ en produit direct de groupes cycliques dont l'ordre est puissance de nombre premier. Le but de ce travail est de comparer R_n et R'_n. Nous allons prouver le résultat suivant:

Théorème. *Soit N l'entier bien déterminé tel que la classe J soit une puissance* 2^{N-1}-ème, *mais ne soit pas une puissance* 2^N-ème.

On a $R'_N=R_N-1$ et $R'_n=R_n$ si $n\neq N$.

Explicitant les conditions sur J pour que $N>1$, puis $N>2$, on trouvera:

Corollaire 1. *On a $R'_1=R_1$ si, et seulement si, D est somme de deux carrés.*

Corollaire 2. *Si $R'_1=R_1$, on a $R'_2=R_2$ si, et seulement si, il existe des décompositions $D=\alpha^2+\beta^2$ où α est impair et résidu quadratique de tous les facteurs premiers impairs de D.*

Une autre formulation du corollaire 1, que nous rappelerons plus

*) 9, rue des Soeurs Macarons, 54000—Nancy, France.