174. *Endgültige Fundamentalsätze der Kugelkongruenzentheorie im konformen Raume, II.*[1]

By Tsurusaburo TAKASU.
Mathematical Institute, Tohoku Imperial University, Sendai.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Nov. 2, 1928.)

3. Zwei natürliche Individualisierungsweisen von der instantanen Absoluten A und der instantanen Absolutpolare U.

(i) Ich habe schon[2] die zwei Kugeln A und U innerhalb des linearen Kugelsystems $l\mathfrak{x}+m\bar{\mathfrak{x}}$ dadurch individualisiert, dass *die beiden Zentralkugeln η und $\bar\eta$ in Bezug auf A invers werden*:

$$(7)\quad \begin{aligned} A&=(\mu\mathfrak{x}-\bar\mu\bar{\mathfrak{x}}):2\equiv(\mathfrak{x}'-\bar{\mathfrak{x}}'):2, & \mu&\equiv k^{-1}\sqrt{H/\bar H}\equiv k^{-1}\sqrt{(\bar{\mathfrak{x}}\eta)_5/(\mathfrak{x}\bar\eta)_5}\,,\\ U&=i(\mu\mathfrak{x}+\bar\mu\bar{\mathfrak{x}}):2\equiv i(\mathfrak{x}'+\bar{\mathfrak{x}}'):2, & \bar\mu&\equiv k^{-1}\sqrt{\bar H/H}\equiv k^{-1}\sqrt{(\mathfrak{x}\bar\eta)_5/(\bar{\mathfrak{x}}\eta)_5}\,. \end{aligned}$$

Es ist sehr leicht zu zeigen, dass

$$(8)\quad (U\eta'')_5=(U\bar\eta'')_5=\varepsilon ik/\sqrt{H\bar H}\,,\qquad (U\eta')_5=(U\bar\eta')_5=\varepsilon i\,,$$

sodass η', $\bar\eta'$ *bez.* η'', $\bar\eta''$ *in Bezug auf U invers werden.*

(ii) Individualisiert man nun innerhalb des Kugelbüschels $l\mathfrak{x}+m\bar{\mathfrak{x}}$ die Kugel A, sodass *die Tangentialkugeln χ und $\bar\chi$ in Bezug auf A invers werden, so hat man*

$$(9)\quad \check A=\varepsilon(\tilde\mu\mathfrak{x}+\bar{\tilde\mu}\bar{\mathfrak{x}}):2=\varepsilon(\check{\mathfrak{x}}+\check{\bar{\mathfrak{x}}}):2,\qquad \tilde\mu\equiv k^{-1}\sqrt{\bar{\mathfrak{H}}/\mathfrak{H}}\equiv k^{-1}\bar{\mathfrak{H}}/\sqrt{\mathfrak{H}\bar{\mathfrak{H}}}\,,$$

$$(10)\quad \check U=i\varepsilon(\tilde\mu\mathfrak{x}-\bar{\tilde\mu}\bar{\mathfrak{x}}):2=i\varepsilon(\check{\mathfrak{x}}-\check{\bar{\mathfrak{x}}}):2,\qquad \bar{\tilde\mu}\equiv k^{-1}\sqrt{\mathfrak{H}/\bar{\mathfrak{H}}}\equiv k^{-1}\mathfrak{H}/\sqrt{\mathfrak{H}\bar{\mathfrak{H}}}\,.$$

χ und $\bar\chi$ berühren A.

Es ist leicht zu zeigen, dass

$$(11)\quad (\check A\chi')_5=\varepsilon k\sqrt{\mathfrak{H}\bar{\mathfrak{H}}}=(\check A\bar\chi')_5,\quad (\check A\chi'')_5=\varepsilon k/\sqrt{\mathfrak{H}\bar{\mathfrak{H}}}=(\check A\bar\chi'')_5,\quad (\varepsilon=\pm1),$$

sodass χ', $\bar\chi'$ bez. χ'', $\bar\chi''$ in Bezug auf $\check A$ invers werden.

Wir können nun beweisen[3]:

---

1) Vgl. Teil I. Dieses Proc. S. 157.

2) Siehe Abschnitt II, S. 362, Fussnote 1), S. 157.

3) Nach der Formel $(536)_1$, S. 366, a.a.O.

$$\xi_{hk}=-\mathfrak{g}_{hk}\xi+\frac{1}{2k^2}(\bar D_{hk}\mathfrak{x}+D_{hk}\bar{\mathfrak{x}})$$

haben wir

(a) $\mathfrak{g}^{hk}\xi_{hk}/2+\xi=(\bar{\mathfrak{H}}\mathfrak{x}+\mathfrak{H}\bar{\mathfrak{x}})/2k^2$.

Aus (9) und (a) ergibt sich

$$\check A=k(\xi+\mathfrak{g}^{hk}\xi_{hk}/2):\sqrt{\mathfrak{H}\bar{\mathfrak{H}}}\,.$$

Wegen $(\check A\check A)_5=1$, erhält man $\sqrt{\mathfrak{H}\bar{\mathfrak{H}}}=k[\mathfrak{g}^{rs}\mathfrak{g}^{pq}(\xi_{rs}\xi_{pq})/4-1]^{\frac{1}{2}}$, worans folgen (12) und (13).

Die Formeln (12) und (13) versagen für die Zentralkugelkongruenz.