

PAPERS COMMUNICATED

24. Über die Klassenzahlen abelscher Zahlkörper.

Von Eizi INABA.

Mathematisches Institut der Kaiserlichen Universität zu Tokyo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Mar. 12. 1935.)

Es seien k_1 und k_2 unabhängige abelsche Körper über dem rationalen Zahlkörper $R: k_1 \cap k_2 = R$. \bar{k} sei das Kompositum von k_1 und k_2 . Der absolute Klassenkörper \bar{K} zu \bar{k} enthält nach dem Verschiebungssatz der Klassenkörpertheorie das Kompositum von \bar{k} und dem absoluten Klassenkörper K_1 zu k_1 . \bar{K} enthält folglich K_1 . Ebenso ist ersichtlich, dass \bar{K} den absoluten Klassenkörper K_2 zu k_2 in sich enthält.¹⁾ Wenn ferner D der Durchschnitt von K_1 und K_2 ist, dann gilt bekanntlich

$$[K_1 : R] [K_2 : R] = [K_1 K_2 : R] [D : R].$$

Weil aber $K_1 K_2$ in \bar{K} enthalten ist, geht also $[K_1 : R] [K_2 : R]$ in $[\bar{K} : R] [D : R]$ auf. Wegen $[k_1 : R] [k_2 : R] = [\bar{k} : R]$ folgt hieraus:

$$[K_1 : k_1] [K_2 : k_2] | [\bar{K} : \bar{k}] [D : R].$$

Wenn nun die Diskriminanten von k_1 und k_2 teilerfremd sind, dann ist natürlich $D = R$. Also gilt der folgende

Satz 1. Das Produkt der Klassenzahlen mehrerer abelscher Zahlkörper, deren Diskriminanten zu je zweien teilerfremd sind, geht in die Klassenzahl ihres Kompositums auf.

Es lässt sich noch in gewissen Fällen leicht ersehen, dass K_1 und K_2 unabhängig sind d.h. D mit R zusammenfällt.

Die grössten absolut-abelschen Unterkörper von K_1 und K_2 seien nun k'_1 und k'_2 resp. Der Durchschnitt d' von k'_1 und k'_2 ist natürlich der grösste absolut-abelsche Unterkörper von D . D muss also über d' abelsch sein. Wenn speziell $d' = R$ ist, dann ist $D = R$. Denn $d' = R$ muss alsdann der grösste abelsche Unterkörper von D sein. Also lässt sich zeigen, dass $D = R$ ist, wenn die Körpergrade von k_1 und k_2 relativ prim sind.

In der Tat sei H die k'_1 zugeordnete Idealgruppe in k_1 und C eine beliebige Idealklasse nach H . Wenn ein Ideal α in k_1 zu C angehört,

1) Hierbei verstehe man „absolute Klassenkörper“ und „Klassenzahlen“ entweder im weiteren Sinne oder im engeren Sinne.