41. Über die Algebren über einem Körper von der Primzahlcharakteristik. II.

Von Tadasi NAKAYAMA.
Mathematisches Institut der Kaiserlichen Universität zu Osaka.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., May 12, 1936.)

Aus den Resultaten in einer vor kurzem erschienen Arbeit von A. Albert[1] und in meiner früheren Arbeit[2] erhält man den folgenden Satz, der, wie es mir scheint, eine fundamentale Bedeutung für die Struktur der Algebren über den Körpern von der Primzahlcharakteristik hat.

Satz. *K sei ein Körper der Primzahlcharakteristik p. Dann wird jede (Brauersche) Algebrenklasse $\mathfrak{A}$ mit dem p-Potenzindex über K durch ein direktes Produkt von zyklischen Algebren dargestellt. Insbesondere besitzt $\mathfrak{A}$ (separable) abelsche Zerfällungskörper.*

Zunächst beweisen wir

Hilfssatz. (Zusatz zu A, Theorem 3.) Eine normal-einfache Algebra A vom Grad $n=p^g$ über K besitze einen über K einfachen, vollständig-inseparablen maximalen Unterkörper $K(\alpha): \alpha^n=a\in K$, und A besitze keinen vollständig-inseparablen Zerfällungskörper vom niedrigeren Grad als n. Dann ist A zyklisch und wird in der Form

$$A=(a, Z, S)=Z+\alpha Z+\cdots\cdots+\alpha^{n-1}Z\,; \qquad \alpha^{-1}z\alpha=z^S \qquad (z\in Z)$$

dagestellt, wo Z einen zyklischen maximalen Unterkörper von A, und S einen erzeugenden Automorphismus von Z/K bedeutet.[3]

Beweis. Der Hilfssatz ist nichts anderes als A, Theorem 1, wenn $n=p$ d.h. $g=1$ ist. Es sei also $g\geqq 2$. Um die Behauptung durch Induktion zu beweisen, nehmen wir an, dass die Behauptung für die Algebren mit den niedrigeren p-Potenzindizen als p^g schon bewiesen ist.

A' sei die normal-einfache Algebra über $K(\alpha^{\frac{n}{p}})=K'$, die aus den sämtlichen mit K' elementweise vertauschbaren Elementen aus A besteht. Bekanntlich[4] ist dann $A_{K'}\sim A'$. Also besitzt A' keinen über K' vollständig-inseparablen Zerfällungskörper vom niedrigeren Grad als $\frac{n}{p}$. Nach der Induktionsannahme enthält A' einen zyklischen maximalen Unterkörper Z' derart, dass $\alpha^{-1}z'\alpha=z'^{S'}$ für jedes z' aus Z' gilt (S':

1) A. Albert: Normal division algebras of degree p^e over F of characteristic p. Trans. Amer. Math. Soc. **39** (1936), S. 183–188 (zitiert mit A).

Für das Folgende vgl. auch E. Artin und O. Schreier: Eine Kennzeichnung der reell abgeschlossenen Körper. Abhandl. math. Sem. Hamburg **5** (1927), 225–231 und A. Albert: Cyclic fields of degree p^n over F of characteristic p. Bull. Amer. Math. Soc. **40** (1934), S. 625–631.

2) T. Nakayama: Über die Algebren über einem Körper von der Primzahlcharakteristik. Proc. **11** (1935), 305–306 (zitiert mit N).

3) Leider kann ich noch nicht entscheiden, ob solche Algebra A stets eine Divisionsalgebra ist oder nicht.

4) Siehe z.B. E. Noether: Nichtkommutative Algebra. Math. Zeitschr. **37** (1933), S. 514–541.