67. *Sur un théorème de M. Beurling.*

Par Seiiti IRIE.

L'Institut Mathématique, l'Université Impériale de Hokkaido, Sapporo.

(Comm. by T. YOSIE, M.I.A., July 12, 1937.)

1. M. Beurling a établi dans sa Thèse[1] le théorème suivant: *Supposons qu'une fonction $U(z)$ soit harmonique et uniforme dans un domaine D et qu'elle soit bornée supérieurement au voisinage d'un point frontière z_0 de D; soit z_0 régulier pour le problème de Dirichlet. Si $U(z)$ satisfait à l'inégalité: $\overline{\lim\limits_{z'\to z_0}}\ \overline{\lim\limits_{z\to z'}}\ U(z) \leqq m$, z' étant un point frontière de D, m un nombre réel fini, on a $\overline{\lim\limits_{z\to z_0}}\ U(z) \leqq m$.*

Le but de cette Note est d'en donner une démonstration élémentaire en remplaçant l'hypothèse que le point z_0 soit régulier pour le problème de Dirichlet par les suivantes: *Supposons qu'il existe un continu frontière de D qui contienne le point z_0 et que z_0 soit accessible par l'intérieur*, c'est-à-dire qu'il existe un arc simple de Jordan l dont une extrémité est z_0 et dont tous les autres points appartiennent à D.

2. Désignons par $z=z(t)$ l'équation de l'arc l, $z(t)$ étant une fonction d'un paramètre réel t définie et continue dans un intervalle fermé $[0, 1]$.

Considérons d'abord la fonction $\zeta=\sqrt{\dfrac{z-z_0}{z-z_1}}$, $z_1(\neq z_0)$ étant un point de l. Chacune des deux branches de cette fonction $\zeta=\varphi_1(z)$ ou $\zeta=\varphi_2(z)$ est uniforme dans D et transforme biunivoquement D en un domaine soit D_1 ou D_2. Ces deux domaines D_1 et D_2 sont extérieurs l'un à l'autre et leur frontières contiennent le point $\zeta=0$ comme le transformé de z_0. Le domaine simplement connexe $\mathfrak{D}$ dont la frontière est l'arc simple de Jordan l_2: $\zeta=\zeta(t)=\varphi_2\big(z(t)\big)$ contient le domaine D_1. Soit $w=\psi(\zeta)$ une fonction holomorphe qui transforme biunivoquement $\mathfrak{D}$ au cercle $|w|<1$ tel que $\zeta=0$ corresponde au point $w=1$. La fonction holomorphe $w=\psi\big(\varphi_1(z)\big)$ transformera biunivoquement D en un domaine $\varDelta$ intérieur au cercle $|w|<1$ et le point z_0 au point $w=1$, la transformation étant bicontinue sur la frontière au voisinage de z_0.

On voit ainsi qu'il suffit de considérer le cas où D est un domaine $\varDelta$ qui est contenu dans le cercle $|z|<1$ et dont la frontière contient le point $z=1$.

En considérant désormais un tel domaine $\varDelta$, démontrons la proposition suivante: *Supposons qu'à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un cercle de centre $z=1$ tel qu'en tout point de $\varDelta$ intérieur à ce cercle on ait: $u(z)<\dfrac{\varepsilon}{|1-z|}$. (Si $u(z)$ est borné supérieurement*

---

1) A. Beurling: Étude sur un problème de majoration (Upsal, 1933), p. 69.