# 43. Über die Riemannsche Fläche algebraischer Funktionen.

Von Yukiyosi KAWADA.

Mathematisches Institut der Kaiserlichen Universität, Tokyo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., May 12, 1938.)

**1.** Wenn $k$ der komplexe Zahlkörper (kurz: k. Z.) und $y$ eine algebraische Funktion von einer unabhängigen Variablen $x$ ist, so gilt bekanntlich, dass ($A$) alle Funktionen des Funktionenkörpers $K=k(x,y)$ auf seiner Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}_K^*$ bis auf endlich viele Pole überall regulär sind und umgekehrt, und dass ($B$) jeder Punkt $\mathfrak{p}^*$ auf $\mathfrak{R}_K^*$ einem Primdivisor $\mathfrak{p}$ von $K$, den man wie üblich nach der Bewertung von $K$ definiert, umkehrbar eindeutig zugeordnet ist, und die formale Entwicklung von $z\in K$ nach der Bewertungstheorie in einem Primdivisor $\mathfrak{p}$ mit einem Primelement $t$:

$$z=\sum_{n\geq r} a_n t^n\,, \qquad a_n\in k\,, \qquad a_r \neq 0 \tag{1}$$

mit der gewöhnlichen funktionentheoretischen Entwicklung im $\mathfrak{p}$ zugeordneten Punkt $\mathfrak{p}^*$ auf $\mathfrak{R}_K^*$ übereinstimmt.

Wenn der Konstantenkörper $k$ nicht der k. Z. ist, werden wir nun die Riemannsche Fläche des algebraischen Funktionenkörpers $K$ durch diese Eigenschaften ($A$), ($B$) definieren. Für diesen Zweck setzen wir bezl. $k$ folgende Axiome voraus:

*Axiom 1. Der Konstantenkörper $k$ ist algebraisch abgeschlossen.*

*Axiom 2. $k$ ist ein topologischer Körper*[1]: in $k$ ist eine Topologie so gegeben, dass 1) $k$ ein Hausdorffscher Raum mit dem ersten Abzählbarkeitsaxiom (kurz: 1. A. A.) ist, und 2) aus $a_i\to a$, $b_i\to b$ die Konvergenzen $a_i\pm b_i\to a\pm b$, $a_ib_i\to ab$ und $a_ib_i^{-1}\to ab^{-1}$ ($b\neq 0$) folgen.

Wir definieren den Funktionswert $z(\mathfrak{p})$ von $z\in K$ bei $\mathfrak{p}$ durch die Eigenschaft ($B$), so dass $z(\mathfrak{p})=a_0$, wenn bei (1) $r\geqq 0$ ist, und $z(\mathfrak{p})=\infty$, wenn $r<0$. Wir denken uns die absolute Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}_K$ von $K$, die aus allen Primdivisoren von $K$ besteht, und definieren die Topologie von $\mathfrak{R}_K$ folgenderweise:

*Def. 1. Auf $\mathfrak{R}_K$ gilt die Konvergenz $\mathfrak{p}_i\to\mathfrak{p}$ dann und nur dann, wenn für alle $z$ mit $z(\mathfrak{p})\neq\infty$ die Konvergenzen $z(\mathfrak{p}_i)\to z(\mathfrak{p})$ in $k$ gelten.*

Damit wird $\mathfrak{R}_K$ nach diesem Konvergenzbegriff als Konvergenzraum[2] bestimmt. Wenn $k$ der k. Z. ist, so ist unsere Definition der Topologie von $\mathfrak{R}_K$ mit der klassischen äquivalent. Denn nach den Eigenschaften ($A$), ($B$) ist die eineindeutige Zuordnung $\mathfrak{p}^*\to\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{R}_K^*$ auf $\mathfrak{R}_K$ eineindeutig stetig, und aus der Kompaktheit von $\mathfrak{R}_K^*$ folgt die Homöomorphie von $\mathfrak{R}_K^*$ und $\mathfrak{R}_K$.

Bekannt sind folgende Eigenschaften von $\mathfrak{R}_K$, wenn $k$ der k. Z. ist: ($C$) $\mathfrak{R}_K$ ist ein Hausdorffscher Raum. ($D$) Eine passend gewählte Umgebung jedes Punktes $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{R}_K$ ist mit einer Umgebung von 0 auf $k$

---

1) Vgl. D. van Dantzig, Studien over topologische algebra, Diss. Groningen, 1931. S. Kakutani, Über eine Metrisation der topologischen Gruppen. Proc. **12** (1936). Darin wird gezeigt, dass $k$ mit Axiom 2 sogar metrisierbar ist.

2) Vgl. Alexandroff-Hopf, Topologie I. 1935.