8. *Sur un théorème de MM. Seidel-Beurling.*

Par Kinjiro KUNUGUI.

Institut de Mathématiques, Université Impériale de Hokkaido.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Feb. 13, 1939.)

1. M. W. Seidel[1] a démontré un théorème suivant qui peut être considéré comme un point de départ d'une série des recherches sur l'allure des fonctions analytiques au voisinage du contour d'un domaine d'holomorphie.[2]

Théorème A (Seidel). *Soit $f(z)$ une fonction analytique qui est bornée dans un domaine D,[3] limité par une courbe jordanienne Γ, simple et fermée. Soit z_0 un point de Γ. Alors, nous avons $\overline{\lim\limits_{z\to z_0}}\,|f(z)|=\overline{\lim\limits_{z'\to z_0}}\;\overline{\lim\limits_{\substack{z\to z'\\ z'\neq z_0}}}\,|f(z)|$[4], z' désignant les points arbitraires de Γ.*

D'autre part, M. A. Beurling[5] a considéré le même théorème dans les conditions plus larges:

Théorème B (Beurling). *Soient D un domaine et z_0 un de ses points frontiers, régulier pour le problème de Dirichlet.[6] Supposons qu'une fonction uniforme $f(z)$ soit holomorphe et bornée dans D. Alors nous avons $\overline{\lim\limits_{z\to z_0}}\,|f(z)|=\overline{\lim\limits_{z'\to z_0}}\;\overline{\lim\limits_{\substack{z\to z'\\ z'\neq z_0}}}\,|f(z)|$, z' désignant les points frontiers.*

M. S. Irié a remarqué enfin que, dans le cas où le point frontier z_0 est accessible et contenu dans un continu situé en dehors de D (ce qui entraîne la régularité de z_0 pour le problème de Dirichlet), la démonstration peut être beaucoup simplifiée.[7] Or, le but de cette Note est de montrer que la condition de régularité du point z_0 pour le problème de Dirichlet dans le théorème B est superflue. Nous allons donc démontrer le théorème suivant:

Théorème. *Soient D un domaine quelconque et z_0 un de ces points frontiers qui n'est pas isolé. Supposons qu'une fonction uniforme $f(z)$*

---

1) W. Seidel: On the cluster values of analytic functions; Transactions of the American Mathematical Society, vol. **34** (1932), pp. 1–21. Il s'agit du "Theorem 1" de p. 3. de ce mémoire.

2) Cf. J. L. Doob: On a theorem of Gross and Iversen; Annals of Mathematics, vol. **33** (1932), pp. 753–757; A. Beurling: Étude sur un problème de Majoration, Thèse de Upsal (1933); K. Noshiro: On the theory of the cluster sets of analytic functions, Journal of the Faculty of Science, Hokkaido Imperial University, Series I, vol. VI. pp. 217–231.

3) Nous appelons ainsi tout ensemble ouvert et connexe.

4) $\overline{\lim\limits_{z\to z_0}}\,|f(z)|$ désigne la plus grande limites de $|f(z)|$, lorsque z tend, d'une maniere quelconque mais en restant toujours dans D, vers le point z_0.

5) A. Beurling: loc. cit. p. 101.

6) Quant à la définition, voir p. ex. A. Beurling: loc. cit. p. 66; M. Brelot: Le problème de Dirichlet sous sa forme moderne, Mathematica, vol. VII (1933), p. 153.

7) S. Irié: Sur un théorème de M. Beurling, Proc. **13** (1937), 244–246. D'ailleurs, c'est seulement ce cas considéré par M. S. Irié que nous nous servirons, dans la suite, du théorème B.