20. *Charaktere linearer Gruppen.*

Von Yukiyosi KAWADA.

Mathematisches Institut der Kaiserlichen Universität, Tokyo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., March 13, 1939.)

In der vorliegenden Note sollen alle einfachen Charaktere gewisser linearer Gruppen aufgestellt werden (**1. 3.** und **5.**), daraus werden sich einige Anwendungen auf die Zetafunktionen und Diskriminanten algebraischer Zahlkörper ergeben (**2. 4.** und **5.**).

1. Es sei $K=GF(p^n)$ ein Galoisfeld, $q=p^n-1$, und ω_0 eine primitive Einheitswurzel q-ter Ordnung in K; $\omega=\omega_0^r$, $rm=q$ $(m \neq 1)$. $\mathfrak{G}$ sei die Gruppe aller linearen Substitutionen

$$Px=\omega^i x+\alpha\,; \quad i=0,1,\dots,m-1\,; \quad \alpha\in K\,.$$

Wird $S_\alpha x=x+\alpha$, $Tx=\omega x$ gesetzt, so ist $S_\alpha\cdot S_\beta=S_{\alpha+\beta}$, $S_\alpha^{-1}=S_{-\alpha}$, $S_0=E$, $T^{-1}S_\alpha T=S_{\omega\alpha}$; daher ist $\mathfrak{S}=\{S_\alpha\}$ $(\alpha\in K)$ normalteiler von $\mathfrak{G}$. Die $(r+m)$ Elemente $E, S_{\omega^j\alpha}$ $(j=0,\dots,m-1\,;\alpha\neq 0)$ und T^iS_α $(\alpha\in K;$ $i\neq 0)$ stellen die konjugierten Elemente von $\mathfrak{G}$ dar.

Die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}$ ist unser Normalteiler $\mathfrak{S}$, wie leicht zu sehen ist. Daher sind die einfachen Charaktere ersten Grades von $\mathfrak{G}$ die folgenden:

$$\chi_\mu(T^iS_\alpha)=\zeta_m^{\mu i}\,; \quad \mu=0,1,\dots,m-1\,; \quad \zeta_m=e^{\frac{2\pi i}{m}}. \tag{1}$$

Da $\mathfrak{G}$ metabelsch ist, so ist jeder der r einfachen Charaktere nicht-ersten Grades von $\mathfrak{G}$ der von einem abelschen Charaktere eines Normalteilers $\mathfrak{N}\supset\mathfrak{S}$ induzierte Charakter.[1] Also ist der Grad eines solchen Charakters $g_i\leqq m=(\mathfrak{G}:\mathfrak{S})$, $(i=1,\dots,r)$. Aus der bekannten Formel

$$(\mathfrak{G}:E)=mp^n=m\cdot 1^2+\sum_{i=1}^{r}g_i^2\,, \quad \text{d. h.} \quad m^2r=\sum_{i=1}^{r}g_i^2\,,$$

ergibt sich somit $g_i=m\,(i=1,\dots,r)$, folglich $\mathfrak{N}=\mathfrak{S}$.

Es sei nun ψ ein einfacher Charakter von $\mathfrak{S}$, der vom Hauptcharakter ψ_0 verschieden ist. Dann ist $\psi_\lambda(S_\alpha)=\psi(S_{\lambda\alpha})$ $(\lambda\in K, \lambda\neq 0)$ auch ein einfecher Charakter von $\mathfrak{S}$; durchläuft λ die Elemente $(\neq 0)$ aus K, so durchläuft ψ_λ die einfachen Charaktere $(\neq\psi_0)$ von $\mathfrak{S}$. Wegen $\mathfrak{G}=\mathfrak{S}+\mathfrak{S}T+\cdots\mathfrak{S}T^{m-1}$ ist der von ψ induzierte Charakter

$$\chi_\psi(P)=\begin{cases} m & \text{für} \quad P=E\,,\\ \sum_{i=1}^{m-1}\psi(S_{\omega^i\alpha}) & \text{für} \quad P=S_\alpha\,,\\ 0\,, & \text{sonst.}\end{cases} \tag{2}$$

---

1) Z. Suetuna: Ueber die L-Funktionen in gewissen algebraischen Zahlkörpern, Japan. Jour. Math. **13**, (1936), 27–38; Satz 2.