# 63. *Sur les équations de Gauss dans la géométrie conforme des espaces de Riemann.*

Par Kentaro YANO.

Institut de Mathématiques, Université Impériale de Tokyo.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Oct. 12, 1939.)

Le but de cette Note est de trouver les équations de Gauss dans la géométrie conforme des espaces de Riemann et d'en tirer quelques conséquences.

1. Considérons un espace de Riemann $V_n$ dont la forme fondamentale est

$$ds^2 = g_{\mu\nu} du^\mu du^\nu , \qquad (\lambda, \mu, \nu, \dots = 1, 2, 3, \dots, n) . \tag{1.1}$$

Quand on effectue une transformation conforme du tenseur fondamental

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \rho^2 g_{\mu\nu} , \tag{1.2}$$

les symboles de Christoffel

$$\left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} (g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\alpha\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha}) \tag{1.3}$$

où la virgule désigne la dérivée partielle par rapport à $u^\nu$, se transforment en $\overline{\left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}}$ suivant les formules

$$\overline{\left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}} = \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} + \delta^\lambda_\mu \rho_\nu + \delta^\lambda_\nu \rho_\mu - g^{\lambda\alpha} \rho_\alpha g_{\mu\nu} , \tag{1.4}$$

où

$$\rho_\nu = (\log \rho)_{,\nu} , \tag{1.5}$$

et le tenseur de Riemann-Christoffel

$$R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} = \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}_{,\omega} - \left\{ {\lambda \atop \mu\omega} \right\}_{,\nu} + \left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\} \left\{ {\lambda \atop \alpha\omega} \right\} - \left\{ {\alpha \atop \mu\omega} \right\} \left\{ {\lambda \atop \alpha\nu} \right\} \tag{1.6}$$

en $\bar{R}^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}$ d'après

$$\bar{R}^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} = R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} - \rho_{\mu\nu} \delta^\lambda_\omega + \rho_{\mu\omega} \delta^\lambda_\nu - g_{\mu\nu} \rho_{\alpha\omega} g^{\alpha\lambda} + g_{\mu\omega} \rho_{\alpha\nu} g^{\alpha\lambda} \tag{1.7}$$

où

$$\rho_{\mu\nu} = \rho_{\mu,\nu} - \rho_\alpha \left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\} - \rho_\mu \rho_\nu + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta g_{\mu\nu} . \tag{1.8}$$

En éliminant $\rho_{\mu\nu}$ de (1.7), l'on trouve que

$$C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} = R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} - \frac{1}{n-2} (R_{\mu\nu} \delta^\lambda_\omega - R_{\mu\omega} \delta^\lambda_\nu + g_{\mu\nu} R^{\lambda}_{\cdot\omega} - g_{\mu\omega} R^{\lambda}_{\cdot\nu}) + \frac{R}{(n-1)(n-2)} (g_{\mu\nu} \delta^\lambda_\omega - g_{\mu\omega} \delta^\lambda_\nu) , \tag{1.9}$$

où

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\lambda} , \quad R^{\lambda}_{\cdot\nu} = g^{\lambda\mu} R_{\mu\nu} , \quad R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} , \tag{1.10}$$