23. *Die Geometrie des Integrals* $\int F(x, x^{(1)}, \dots, x^{(m)})dt$.

Von Hitoshi HOMBU.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Kyusyu Universität.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., March 12, 1940.)

1. In dieser Arbeit wollen wir die Geometrie des metrischen Raums, in dem die Bogenlänge einer Kurve durch ein vom Linienelement m-ter Ordnung abhängiges Integral

$$(1) \qquad s=\int F(x, x^{(1)}, \dots, x^{(m)})dt \qquad (x^{(r)i}=d^r x^i/dt^r)$$

gegeben ist, auf die Theorie der „paths"[1] begründen. Wir fordern dabei die Unabhängigkeit der Bogenlänge von Parametrisierung der Kurve; es gilt dann

$$(2) \qquad \Delta_1 F=F, \qquad \Delta_s F=0 \quad \text{für} \quad s\geqq 2 \quad (\text{oder für } s=2, 3),$$

und das Integral wird auch in der Form $\int \mathfrak{F}(x^i, x^{[1]a}, \dots, x^{[m]a})dz$ $(x^{[r]a} =d^r x^a/dz^r, z\equiv x^n, a=1, 2, \dots, n-1)$ geschrieben. Erstens hat A. Kawaguchi in der Mannigfaltigkeit der Linienelemente $(2m-1)$-ter Ordnung ein „intrinsekes" Übertragungsschema bestimmt,[2] und der Verfasser hat demnach in der Mannigfaltigkeit *m-ter Ordnung* anderes Übertragungsschema gesucht ([2], §4). Im folgenden wird die Mannigfaltigkeit der Linienelemente $X_n^{(m)}$, im Falle $m\geqq 3$, durch die der *Kurvenelemente* $\mathfrak{X}_n^{(m)}$ ersetzt.[3]

2. Nach L. Berwald, H. V. Craig und J. L. Synge sind die Grössen, die aus F aufgebaut sind,

$$(3) \qquad \overset{\mu}{E}_i=\sum_{\lambda=\mu}^{m}(-1)^{\lambda}\binom{\lambda}{\mu}(F_{(\lambda)i})^{(\lambda-\mu)} \qquad (F_{(\lambda)i}=\partial F/\partial x^{(\lambda)i})$$

$(0\leqq\mu\leqq m)$ für jede μ die Bestimmungszahlen eines Vektors. Unter jeder Transformation der Gruppe $G_{(m)}$([3], (2))

$$(4) \qquad x^{(r)i}=\sum_{s=1}^{r}\alpha_s^r(a^q)'x^{(si)} \quad \text{oder} \quad 'x^{(r)i}=\sum_{s=1}^{r}\beta_s^r(a^q)x^{(s)i}$$

$(r=1, 2, \dots, m)$ transformiert sich der Eulersche Vektor $\overset{0}{E}_i$ wie $\overset{0}{E}_i(F) =a^1\overset{0}{E}_i('F)$, und die anderen Vektoren $\overset{\mu}{E}_i$ bilden ein lineares System. Man kann nämlich leicht nach (2) beweisen

---

1) H. Hombu, [1] Die prejektive Theorie eines Systems der „paths" höherer Ordnung, I, Japanese Journ. Math., **15** (1938), 139–196; [2] II, Journ. Fac. Sc., Hokkaido Imp. Univ., (I) **7** (1938), 35–94.

2) A. Kawaguchi, Theory of connections in a Kawaguchi space of higher order. this Proc. **13** (1937), 237–240.

3) Über verschiedene Begriffe und Sätze vgl. H. Hombu, [3] Grundlage der Geometrie in der Mannigfaltigkeit der Kurvenelemente, this Proc. **16** (1940), 90–96.