22. *Grundlage der Geometrie in der Mannigfaltigkeit der Kurvenelemente.*

Von Hitoshi HOMBU.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Kyusyu Universität.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., March 12, 1940.)

1. Längs einer parametrisierten Kurve $x^i = x(t)$ $(i=1, 2, \dots, n)$ wird das System $\{x^i\, x^{(1)i} = dx^i/dt, \dots, x^{(\nu)i} = d^\nu x^i/dt^\nu\}$ Linienelement ν-ter Ordnung der *Kurve* genannt und das System $\{x^a (a=1, 2, \dots, n-1), z \equiv x^n, x^{[1]a} = dx^a/dz, \dots, x^{[\nu]a} = d^\nu x^a/dz^\nu\}$ Kurvenelement ν-ter Ordnung; dieses Element bestimmt ein von jeder Parametrisierung freies infinitesimales Kurvenstück. Wir können aber im allgemeinen von dem Linien- und Kurvenelement reden. Diese Elemente werden durch die Bestimmungszahlen $(x^i, x^{(1)i}, \dots, x^{(\nu)i})$ bzw. $(x^a, z, x^{[1]a}, \dots, x^{[\nu]a})$ definiert, und die Bestimmungszahlen in verschiedenen Koordinatensystemen beziehen sich je mit den bekannten Erweiterungstransformationen. Die $(\nu+1)n$- bzw. $\{(\nu+1)n-\nu\}$-dimensionale Mannigfaltigkeit der Linien- bzw. Kurvenelement ν-ter Ordnung bezeichnet man mit $X_n^{(\nu)}$ bzw. $\mathfrak{X}_n^{(\nu)}$. Da die Bestimmungszahlen des Kurvenelements nicht homogen sind, wollen wir in der $\mathfrak{X}_n^{(\nu)}$ auch die überzähligen Koordinaten des Linienelements benutzen. Ein Linienelement ν-ter Ordnung bestimmt ein Kurvenelement derselben Ordnung und dagegen einem Kurvenelement gehört eine ν-parametrige Schar der Linienelemente ν-ter Ordnung.

Bei einer Parametertransformation der Kurve drückt sich $x^{(r)i}$ durch $x^{(\bar{s})i} = d^s x^i/d\bar{t}^s$ in der Form aus: $x^{(r)i} = \sum_{1 \leq s \leq r} a_s^r x^{(\bar{s})i}$, wo a_s^r ein Polynom der Ableitungen $\bar{t}^{(q)} = d^q \bar{t}/dt^q$ ist und durch den folgenden Algorithmus bestimmt wird:

$$a_s^r = \bar{t}'^r \quad \text{für} \quad r=s, \qquad = \bar{t}^{(r)} \quad \text{für} \quad s=1,$$

$$= a_{s-1}^{r-1} \bar{t}' + (a_s^{r-1})^{(1)} \quad \text{für} \quad r > s > 1.$$

Betreffs der Gestalt von a_s^r ist nach A. Kawaguchi die Formel

$$\partial a_s^r / \partial \bar{t}^{(q)} = \binom{r}{q} a_{s-1}^{r-q} \qquad (1 \leqq q \leqq r) \tag{1}$$

bekannt. Da in einem Punkt der Kurve die Ableitungen $\bar{t}^{(1)} \neq 0, \bar{t}^{(2)}, \dots, \bar{t}^{(\nu)}$ ganz beliebige Werte annehmen können, so sind zwei Linienelement ν-ter Ordnung $(x^{(r)i})$ und $('x^{(r)i})$ dann und nur dann demselben Kurvenelement zugehörig, wenn ein System der Konstanten $a^1 \neq 0, a^2, \dots, a^\nu$ vorhanden ist, so dass

$$x^{(r)i} = \sum_{1 \leqq s \leqq r} a_s^r(a) \cdot 'x^{(s)i} \qquad (r=1, 2, \dots, \nu) \tag{2}$$

gültig sind; $a_s^r(a)$ lässt sich wegen (1) durch

$$a_1^1(a) = a^1, \qquad a_q^{r+1}(a) = \sum_{0 \leqq u \leqq r-q+1} \binom{r}{u} a_{q-1}^{r-u}(a) a^{u+1} \tag{3}$$