

## 18. Sur un problème de M. E. Szpilrajn.

Par Kinjiro KUNUGUI.

L'Institut de Mathématiques, l'Université Impériale de Hokkaido, Sapporo.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., March 12, 1940.)

$M$  étant un ensemble quelconque situé dans le plan  $OYX$ , désignons par  $M^{x_0}$  l'intersection de  $M$  par la droite parallèle à l'axe  $OY$  menées par le point  $(x_0, O)$ , et par (1)  $U(M)$ , (2)  $D_1(M)$ , (3)  $\Gamma(M)$  ou (4)  $\Delta(M)$  l'ensemble de tous les points  $x_0$  de l'axe  $OX$  tels que  $M^{x_0}$  soient des ensembles non vides et resp. (1) contenant chacun un seul point, (2) au plus dénombrables, (3) fermés ou (4) qui sont des ensembles  $F_\sigma$ . Comme un des théorèmes fondamentaux de la théorie des ensembles analytiques (dûs à M. N. Lusin), citons le

Théorème A.<sup>1)</sup> Si  $M$  est un ensemble borelien situé dans le plan, l'ensemble  $U(M)$  est toujours un complémentaire analytique.

Corollaire A.<sup>2)</sup> Soit  $M$  un ensemble borelien situé dans le plan  $OXY$ , dont toutes les sections  $M^x$  sont des ensembles contenant chacun au plus un seul point. La projection de  $M$  sur l'axe  $OX$  est un ensemble borelien.

Le théorème A a été généralisé par Mlle S. Braun comme il suit :

Théorème B.<sup>3)</sup> Si  $M$  est un ensemble borelien situé dans le plan, l'ensemble  $D_1(M)$  est toujours un complémentaire analytique, et celui-ci donne un corollaire suivant dû également à M. N. Lusin :

Corollaire B.<sup>4)</sup> Soit  $M$  un ensemble borelien situé dans le plan  $OXY$ , dont toutes les sections  $M^x$  sont des ensembles au plus dénombrables. Alors, la projection de  $M$  sur l'axe  $OX$  est un ensemble borelien.

À propos de ces théorèmes, M. E. Szpilrajn a posé un problème :<sup>5)</sup> soit  $M$  un ensemble plan  $G_\delta$  (plus généralement un ensemble borelien) dont toutes les intersections avec les droites parallèles à l'axe  $OY$  sont des ensembles fermés (plus généralement : des  $F_\sigma$ ). La projection de  $M$  sur l'axe  $OX$  est-elle toujours un ensemble borelien ?

Nous avons donné une réponse à ce problème, en montrant le

Théorème C.<sup>6)</sup> Soit  $M$  un ensemble  $G_\delta$  situé dans le plan. Alors, l'ensemble  $\Delta(M)$  est toujours un complémentaire analytique, qui entraîne le

1) N. Lusin : Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications, Paris, 1930, p. 259.

2) Ibid. p. 166.

3) S. Braun : Quelques théorèmes sur les cribles boreliens, *Fundamenta Mathematicae*, t. XX (1933), p. 166-172.

4) N. Lusin, loc. cit. p. 178.

5) *Fundamenta Mathematicae*, t. XXIV (1935), p. 324. Problème 61.

6) K. Kunugui : Sur la projection d'un ensemble plan  $G_\delta$ . *Proc.* 14 (1933), 90-95. Contribution à la théorie des ensembles boreliens et analytiques, I, *Journal of the Faculty of Science, Hokkaido Imperial University, Series I*, vol. VII (1939), p. 161-189.