5. *Über die Gruppe der messbaren Abbildungen.*

Von Kunihiko KODAIRA.
Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Jan. 13, 1941.)

1. Es seien Ω ein Raum (mit Punkten $P, Q, \dots$) und G eine Gruppe der ein-eindeutigen Abbildungen $x: P \to P\cdot x$ von Ω auf sich selbst. In vorliegender Note betrachten wir G-invariante Masse[1] μ^* in Ω. Dabei kann $\mu(\Omega)$[2] auch unendlich sein, jedoch verlangen wir immer, dass Ω die Summe höchstens abzählbar vieler Mengen mit endlichen Massen ist. In G sei ein links-invariantes Mass m^* mit der folgenden Eigenschaft erklärt: *Ist eine (komplex-wertige) Funktion $f(x)$ in Ω messbar, so ist $f(y^{-1}x)$ es auch.* Dabei soll G auch die Summe höchstens abzählbar vieler Mengen mit endlichen Massen sein. Eine Gruppe mit einem solchen Mass wurde von Herrn A. Weil „groupe mesuré" genannt.[3] Wir wollen ein solches m^* ein Weilsches Mass nennen.[4] In G ist dann $f(x^{-1})$ mit $f(x)$ auch messbar, da aus der Voraussetzung folgt, dass $f\left((y^{-1}x)^{-1}\right)=f(x^{-1}y)$ für fast alle y messbar in x ist. Wenn $\int_G f(x)dx=0$ ist, ist auch $\int_G f(x^{-1})dx=0$. *Die Messbarkeit ist daher in G invers- und rechts-invariant. Ebenso invariant ist die Eigenschaft einer Teilmenge A: $m(A)=0$.*[5] Eine Abbildung eines Raumes Ω_1 mit einem Mass in einem ebensolchen Raum Ω_2 heisst nach Herrn J. von Neumann messbar,[6] wenn das Urbild jeder messbaren Teilmenge aus Ω_2 wieder messbar ist. Die oben genannte Bedingung für das Weilsche Mass ist nichts anders als die Messbarkeit der Abbildung $x \times y \to y^{-1}x$ von $G \times G$ auf G. Wir bezeichnen die Familie aller μ^* (bzw. m^* u. s. w.)-messbaren Teilmengen mit endlichen Massen von Ω (bzw. G, u. s. w.) mit (μ) (bzw. (m), u. s. w.).

Satz 1. *Die Abbildung: $P\times x \times y \to P \times y^{-1}x$ von $\Omega \times G \times G$ auf $\Omega \times G$ ist messbar.*

Beweis. Das Produktmass $\mu m m^*$ sei mit ν^* bezeichnet. Eine Teilmenge $\Gamma \subset \Omega \times G$ sei messbar, und man setze $\mathfrak{A}=(P\times x\times y;\ P\times y^{-1}x \in \Gamma)$.[7] Zum Beweis genügt es die Messbarkeit von $\mathfrak{A}$ zu zeigen,

1) Wir verstehen im folgenden unter Mass immer ein reguläres äusseres Mass vom Carathéodoryschen Typus. Vgl. z. B. S. Saks: Theory of Integral, S. 39–55.

2) Für messbare Teilmenge A schreiben wir $\mu(A)$ statt $\mu^*(A)$.

3) A. Weil: Sur les groupes topologiques et les groupes mesurés. C. R. t. **202** (1936), S. 1147-1149.

4) Vgl. eine Arbeit des Verfassers: Über die Beziehung zwischen den Massen und den Topologien in einer Gruppe, Kap. III. Nr. 3, die demnächst in Proc. Phys.-Math. Soc. of Japan erscheinen wird. Dies wird im folgenden mit B. M. T. zitiert.

5) Ein Mass mit dieser Eigenschaft heisst nach J. von Neumann „right-0-invariant". Vgl. J. von Neumann: The uniqueness of Haar's measure, Recueil Math., I (43) (1936), S. 721–734.

6) J. von Neumann: Über messbare Abbildungen, Annals of Math. Vol. **33** (1932), S. 574–586.

7) Wir bezeichnen die Menge aller Elementen E mit Eigenschaft $\mathfrak{E}$ mit $(E;\ \mathfrak{E})$.