

72. Bemerkungen über Ringelemente.

Von Kenjiro SHODA.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Osaka.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Oct. 11, 1941.)

Wir betrachten einen Ring \mathfrak{o} mit dem Einselement e , der den Doppelkettensatz für Rechtsideale erfüllt. Dann ist es bekannt, daß jedes Element aus \mathfrak{o} entweder Einheit oder Nullteiler ist. *Ein Element a aus \mathfrak{o} ist dann und nur dann eine Einheit, wenn $a\mathfrak{o}=\mathfrak{o}$ ist.* Versteht man unter einer Halbeinheit aus \mathfrak{o} eine Einheit eines Unterringes $\mathfrak{c}\mathfrak{o}\mathfrak{c}$ mit einem passend gewählten idempotenten Element c aus \mathfrak{a} , so kann man nach A. Ranum¹⁾ behaupten: *Ein Element a aus \mathfrak{o} ist dann und nur dann eine Halbeinheit, wenn $a\mathfrak{o}=a^2\mathfrak{o}$ ist.*

Die beiden Kriterien sind die unmittelbaren Folgerungen des Satzes:

Ist \mathfrak{r} ein Rechtsideal, das der Gleichung $\mathfrak{a}\mathfrak{r}=\mathfrak{r}$ mit einem Element a aus \mathfrak{r} genügt, so besitzt \mathfrak{r} ein Linkseinselement u und a ist eine Einheit von $u\mathfrak{o}u$.

Aus $\mathfrak{a}\mathfrak{r}=\mathfrak{r}$ folgt nämlich die Existenz des Elementes u mit $au=a$, $u \in \mathfrak{r}$. Dann ist $a(uz-z)=0$ und nach einem Artinschen Satz²⁾ $uz=z$ für jedes z aus \mathfrak{r} . Hieraus folgt $u^2=u$, $ua=a$, also ist u ein Linkselement von \mathfrak{r} und $a \in u\mathfrak{o}u$. Auf der anderen Seite folgt aus $\mathfrak{a}\mathfrak{r}=\mathfrak{r}$ die Existenz des Elementes a' mit $aa'=u$. Dann ist $aa'a=ua=au$, also $a'a=u$; d. h. a ist eine Einheit von $u\mathfrak{o}u$.

Besteht \mathfrak{o} nur aus Einheiten (ausschließlich Null), so ist \mathfrak{o} ein Schiefkörper. Besteht \mathfrak{o} aus Einheiten und nilpotenten Elemente, so ist \mathfrak{o} vollständig primär im Artinschen Sinne. Besteht \mathfrak{o} aus Halbeinheiten, so ist \mathfrak{o} nach A. Ranum die direkte Summe von Schiefkörpern. Wir beweisen nun:

Besteht \mathfrak{o} nur aus Halbeinheiten und nilpotenten Elemente und zwar enthält \mathfrak{o} mindestens eine von Einheit verschiedene Halbeinheit und mindestens ein von Null verschiedenes nilpotentes Element, so ist der Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{n}$ nach dem Radikal $\mathfrak{n} \neq 0$ die direkte Summe von zwei Schiefkörpern und zwar $\mathfrak{a}=e_1\mathfrak{o}e_1+e_2\mathfrak{o}e_2+\mathfrak{n}$ mit primitiven idempotenten Elemente e_1, e_2 ; und umgekehrt.

Es sei nämlich $e=c_1+c_2$ eine Zerlegung des Einselementes e in die Summe zweier zueinander orthogonalen idempotenten Elemente. Dann ist \mathfrak{o} die direkte Summe von vier Untermoduln $c_i\mathfrak{o}c_j$ und man ersieht leicht, daß mit \mathfrak{o} auch der Unterring $\mathfrak{o}'=c_1\mathfrak{o}c_1+c_2\mathfrak{o}c_2$ aus Halbeinheiten und nilpotenten Elemente besteht. Ist aber etwa n_1 ein nilpotentes Element aus $c_1\mathfrak{o}c_1$, so ist n_1+c_2 weder Halbeinheit noch nilpotentes Element. Also enthält $c_1\mathfrak{o}c_1$ kein nilpotentes Element und folglich ist \mathfrak{o}' die direkte Summe von Schiefkörpern.

1) A. Ranum, The groups belonging to a linear associative algebra, American Journal of Math. **49** (1927), 285.

2) E. Artin, Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen, Abh. aus dem Math. Seminar zu Hamburg **5** (1927), 251.