68. Über das System aller stetigen Funktionen auf einem topologischen Raum.

Von Hidegorô NAKANO.

Mathematical Institute, Tokyo Imperial University, Tokyo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Oct. 11, 1941.)

Das System aller reellen stetigen Funktionen $\mathfrak{S}$ auf einem topologischen Raum R bildet einen sogenannten Verband durch die Ordnung: $f(x) \geqq g(x)$ für alle $x \in R$. Für endlich viele beliebige Funktionen $f_1(x), \dots, f_n(x) \in \mathfrak{S}$ gibt es daher eine derartige Funktion $\varphi(x)$, nämlich $\varphi(x) = \underset{i}{\mathrm{Min}} f_i(x)$, dass $\varphi(x) \leqq f_i(x)$ und $\varphi(x) \geqq h(x)$ für jede stetige Funktion $h(x) \leqq f_i(x)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Für unendlich viele Funktionen gibt es aber nicht immer solche Funktion. Nun betrachten wir zwei Bedingungen über $\mathfrak{S}$, sogenannt „completeness" und „σ-completeness":

A) Für beliebig unendlich viele, stetige Funktionen $f_a(x) \geqq 0$ gibt es eine stetige Funktion $\varphi(x)$, bezeichnet mit $\bigwedge_a f_a(x)$, für die $\varphi(x) \leqq f_a(x)$ und $\varphi(x) \geqq h(x)$ für jede stetige Funktion $h(x) \leqq f_a(x)$ (für alle a) gilt.

B) Für *abzählbar* unendlich viele stetige Funktionen $f_i(x) \geqq 0$ gibt es eine stetige Funktion $\varphi(x)$, bezeichnet mit $\bigwedge_i f_i(x)$, für die $\varphi(x) \leqq f_i(x)$ und $\varphi(x) \geqq h(x)$ für jede stetige Funktion $h(x) \leqq f_i(x)$ $(i = 1, 2, \dots)$ gilt.

Ziel dieser Abhandlung ist zu untersuchen, welche topologische Eigenschaft R haben soll, damit $\mathfrak{S}$ der Bedingung A) oder B) genügt.

Eine abgeschlossene Punktmenge heisst *regulär abgeschlossen*, falls sie die abgeschlossene Hülle einer offenen Punktmenge ist. Eine abgeschlossene Punktmenge heisst *σ-regulär abgeschlossen*, falls sie die abgeschlossene Hülle einer zu F_σ gehörigen offenen Punktmenge ist. Hierbei ist F_σ das System aller Punktmengen, welche Vereinigungen von höchstens abzählbar unendlich vielen abgeschlossenen Punktmengen sind.

Entsprechend A) oder B), betrachten wir als topologische Eigenschaften von R

A′) Alle regulär abgeschlossenen Punktmengen sind auch offen.

B′) Alle σ-regulär abgeschlossenen Punktmengen sind auch offen.

Wir wollen beweisen, *dass* A′) *oder* B′) *bzw. für* A) *oder* B) *hinreichend ist, dass* A′) *für* A) *notwendig ist, falls R vollständig regulär*[1] *ist, und dass* B′) *für* B) *notwendig ist, falls R normal*[2] *ist.*

Satz 1. Wenn ein topologischer Raum R von der Eigenschaft A′) *ist, so genügt das System* $\mathfrak{S}$ *aller stetigen Funktionen auf R der Bedingung* A).

Beweis. Es sei eine Menge von Funktionen $f_i(x) \geqq 0$ in $\mathfrak{S}$. Da $f_i(x)$ stetig in R ist, so ist die Punktmenge $E[x; f_i(x) < a]$ offen für jede Zahl a. Setzt man

1) Vgl. A. Tychonoff: Über die topologische Erweiterung von Räumen, Math. Ann. **102** (1930), 544–561.

2) Vgl. P. Alexandroff und H. Hoph: Topologie, Berlin, 1935.