71. *Über einen schwachen Ergodensatz.*

Von Yukiyosi KAWADA.
Mathematisches Institut, Tokyo Bunrika Daigaku.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., July 13, 1942.)

Die neueren operatorentheoretischen Untersuchungen über den statistischen Ergodensatz[1] suchen die Bedingungen dafür auf, dass die starke Konvergenz folgender Art stattfindet:

$$(1)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(f+Tf+\cdots+T^{n-1}f)=f_0 \qquad (f, f_0 \in \mathfrak{B}),$$

wobei T ein linearer Operator in einem Banachschen Raum $\mathfrak{B}$ ist. Für die Konvergenz der Wahrscheinlichkeitsverteilung auf einem Borelschen Mengenkörper $\mathfrak{F}$ auf einem abstrakten Raum Ω sind solche Untersuchungen u. a. von K. Yosida, S. Kakutani und G. Birkhoff[2] unternommen worden. In diesem Falle ist $\mathfrak{B}$ die Gesamtheit aller vollständig-additiven Mengenfunktionen $\{p\}$ auf $\mathfrak{F}$ mit der Norm $\|p\|=$ Totalvariation von p; es folgt also aus (1)

$$(2)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Big(p(E)+(Tp)(E)+\cdots+(T^{n-1}p)(E)\Big)=p_0(E)$$

für alle $E\in\mathfrak{F}$. Es gibt nun aber auch ein gleichfalls Interesse verdienendes Problem, das sich auf den Fall bezieht, wo (2) nur für einige Mengen E und nicht für alle Mengen $E\in\mathfrak{F}$ gilt: d. i. das „Problem der Konvergenz im Gesetz.“ (Z. B. ist das Gleichverteilungsproblem von H. Weyl ein solches Problem).

Es sei nämlich Ω ein bikompakter Raum und $\mathfrak{F}$ die Gesamtheit aller Borelmengen von Ω. Für die Konvergenz im Gesetz von p_n nach p_0 (p_n, $p_0\in\mathfrak{B}$), die definitionsgemäss $\lim p_n(E)=p_0(E)$ für $p_0(E)=p_0(E^b)$ $=p_0(E^i)$[3] bedeutet, ist notwendig und hinreichend, dass

$$(3)\qquad \lim_{n\to\infty}\int_\Omega g(\omega)p_n(d\omega)=\int_\Omega g(\omega)p_0(d\omega)$$

für alle stetigen Funktionen $g(\omega)$ auf Ω gilt. Es sei also $\mathfrak{B}_0$ der Banachscher Raum aller stetigen Funktion $g(\omega)$ auf Ω mit der Norm $\|g\|=\mathrm{Max}_\omega|g(\omega)|$, dann ist der Raum $\mathfrak{B}$ aller vollständig-additiven Mengenfunktionen gerade der konjugierte Banachsche Raum von $\mathfrak{B}_0$: $\mathfrak{B}=\overline{\mathfrak{B}}_0$; d. h. $\int g(\omega)p(d\omega)$ ist die allgemeine Form des linearen Funktionals von $\mathfrak{B}_0$. Daher ist die Konvergenz im Gesetz von (2), d. h. die Konvergenz

1) Vgl. etwa E. Hopf, Ergodentheorie, (1937).

2) K. Yosida and S. Kakutani, Operator-theoretical treatment of Markoff's process and mean ergodic theorem, Ann. of Math., **42** (1941), 188–228. S. Kakutani, Mean ergodic theorem in abstrakt (L)-spaces, diese Proc. **15** (1939), 121–123. G. Birkhoff, Dependent probabilities and the space (L), Proc. Nat. Acad. U. S. A., **24** (1938), 154–159.

3) E^b bedeutet die abgeschlossene Hülle von E; E^i den offenen Kern.