40. *Sur le parallélisme et la concourance dans l'espace de Riemann.*

Par Kentaro YANO.
Institut Mathématique, Université Impériale de Tokyo.
(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., April 12, 1943.)

§ 1. *Le groupe d'holonomie de l'espace de Riemann.*

Soit V_n un espace de Riemann à n dimensions dont la forme quadratique différentielle fondamentale est

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu , \qquad (\lambda, \mu, \nu, \dots = 1, 2, 3, \dots, n) \tag{1.1}$$

et $[e_\lambda]$ le repère naturel dans l'espace euclidien tangent en un point courant M, alors on aura $e_\mu \cdot e_\nu = g_{\mu\nu}$ en chaque point de l'espace.

Cela étant, la connexion euclidienne sans torsion de l'espace s'exprime par les équations

$$dM = dx^\lambda e_\lambda , \qquad de_\mu = \{^{\lambda}_{\mu\nu}\} dx^\nu e_\lambda \tag{1.2}$$

où $\{^{\lambda}_{\mu\nu}\}$ sont les symboles de Christoffel formés avec les $g_{\mu\nu}$.

Si l'on se donne, dans l'espace de Riemann, un chemin allant d'un point P à un autre point Q, on peut raccorder, grâce à cette connexion euclidienne, l'espace tangent en P de proche en proche le long du chemin considéré avec l'espace tangent en Q. C'est-à-dire que l'on peut développer, sur un même espace euclidien, le chemin et le repère naturel attaché à chaque point de ce chemin. En décrivant ainsi un contour fermé partant d'un point P et y revenant, le point P et le repère naturel en ce point subit un certain déplacement par rapport à leur position initiale.

Ces déplacements associés à tous les contours fermés d'origine donnée P forment un groupe que M. Cartan appelle groupe d'holonomie de l'espace. Ce groupe est essentiellement le même quel que soit le point d'origine P de l'espace. Si ce groupe d'holonomie de l'espace est un sous-groupe du groupe général de déplacements euclidiens, chaque transformation infinitésimale de la connexion euclidienne appartient aussi à ce sous-groupe.

§ 2. *Le parallélisme et la concourance dans l'espace de Riemann.*

Supposons que le groupe d'holonomie d'un espace de Riemann laisse une direction invariante et désignons par v^λ le vecteur ayant cette direction et de longueur constante. Alors, d'après ce qui est dit dans § 1, on a

$$d(v^\lambda e_\lambda) = (dv^\lambda + \{^{\lambda}_{\mu\nu}\} v^\mu dx^\nu) e_\lambda = 0 ,$$

d'où

$$v^\lambda_{;\nu} \equiv \frac{\partial v^\lambda}{\partial x^\nu} + \{^{\lambda}_{\mu\nu}\} v^\mu = 0 , \tag{2.1}$$

donc, v^λ est un champ de vecteur parallèle.

Inversement, si v^λ est un champ de vecteur parallèle, il est évident