37. Über das Helmholtzsche Raumproblem.

Von Shôkichi IYANAGA und Makoto ABE.
Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., April 12, 1943.)

Von Helmholtz stammt der naturgemässe Gedanke, den Euklidischen Raum durch seine „freie Beweglichkeit" zu charakterisieren[1]. S. Lie hat dieser Idee eine mathematisch präzise Formulierung gegeben, und das wichtige Problem behandelt, alle Transformationsgruppen des n-dimensionalen Raumes zu bestimmen, die die Forderung der freien Beweglichkeit (Forderung I des Satzes w. u.) erfüllen[2]. Für kontinuierliche Transformationsgruppen ist dieses Problem von Lie vollständig gelöst worden, dessen Beweis von H. Weyl weiter vereinfacht worden ist[3]. Wie Weyl gezeigt hat, liegt der Kern des Problems darin, die der Forderung I genügende Untergruppe der Gruppe aller affinen Transformationen als mit der Euklidischen Bewegungsgruppe identisch zu erweisen. Weyl tut dies, indem er die Analytizität der in Frage stehenden Untergruppe voraussetzt, und darauf die Methoden der Lieschen Theorie anwendet. Im folgenden soll gezeigt werden, dass man ohne Annahme der Analytizität und mit elementaren Mitteln auskommt, wenn man der betreffenden Untergruppe ausser der Forderung I noch eine weitere Forderung für die Teilräume (Forderung II des Satzes), die uns als eine auch ganz naturgemässe erscheint, auferlegt (§ 1). In § 2 wird dann bewiesen, dass im analytischen Fall die hinzugefügte Forderung II eine Folge der ursprünglichen I ist, womit also ein neuer Beweis für den Weylschen Satz geliefert wird. Es wird schliesslich bemerkt, dass man bei diesem Schluss wenigstens im 2-dimensionalen Fall auch die Stetigkeitsforderung fallen lassen kann.

§ 1. Es sei K ein geordneter Körper, $R=R^n(K)$ der n-dimensionale affine Raum über K. Ein r-dimensionaler linearer Teilraum a_r $(1\leqq r\leqq n)$ von R ist durch einen a_{r-1}, welche in a_r liegt, in zwei Halbräumen a_r' und a_r'' zerlegt. Wir nennen nun eine „*Kette von Halbräumen in R*" eine solche Reihe A inzidenter Halbräume der Dimensionen von n bis hinab zu 0

$$A: \qquad a_n' \supset a_{n-1}' \supset \cdots \supset a_1' \supset a_0\,, \qquad a_n=R\,,$$

dass jedes a_r' $(1\leqq r\leqq n)$ einer der zwei Hälbräume ist, in die a_r durch das nächstfolgende a_{r-1} zerlegt wird.

Nun sei $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}^n(K)$ die Gruppe aller affinen Transformationen von R. Unser Ziel ist der folgende

Satz. Eine Untergruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{A}$ erfülle die folgenden Forderungen:

---

1) H. v. Helmholtz: Über die Tatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1868.

2) S. Lie: Ges. Abhandlungen, II-1, S. 374-480.

3) H. Weyl: Math. Analyse des Raumproblems, S. 29-43. Vgl. insb. Satz T_n.