57. Einige Sätze über freie Gruppen.

Von Kenkiti IWASAWA.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Tokyo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., June 12, 1943.)

1. Es sei $\mathfrak{G}$ eine beliebige Gruppe. Die durch $\mathfrak{Z}_1=\mathfrak{G}$, $\mathfrak{Z}_n=[\mathfrak{G}, \mathfrak{Z}_{n-1}]$[1] $(n=2, 3, \dots)$ definierte Kette von Untergruppen von $\mathfrak{G}$

$$\mathfrak{Z}_1 \supset \mathfrak{Z}_2 \supset \mathfrak{Z}_3 \supset \cdots \supset \mathfrak{Z}_n \supset \cdots \tag{1}$$

heisst die absteigende Zentralreihe von $\mathfrak{G}$[2]. $\mathfrak{Z}_{i-1}/\mathfrak{Z}_i$ ist dann im Zentrum von $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_i$ enthalten, also abelsch und hat endlich viele Erzeugende, wenn $\mathfrak{G}$ selbst endlich viele Erzeugende besitzt. Wenn $\mathfrak{Z}_n$ für irgendein n mit der Einheitsgruppe zusammenfällt, so nennt man $\mathfrak{G}$ nilpotent[3].

Es gilt dann

Satz 1. *$\mathfrak{G}$ sei eine nilpotente Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden. Der Durchschnitt aller Normalteiler mit endlichen Indizen ist dann die Einheitsgruppe.*

Zum Beweis schicken wir einen Hilfssatz voraus.

Hilfssatz. Es sei $\mathfrak{G}$ eine beliebige Gruppe und $\mathfrak{N}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ mit endlich vielen Erzeugenden. Ist $[\mathfrak{G}, \mathfrak{N}]$ eine endliche Gruppe und im Zentrum $\mathfrak{z}$ von $\mathfrak{G}$ enthalten, so enthält $\mathfrak{N}$ eine Untergruppe $\mathfrak{M}$ mit einem endlichen Index $[\mathfrak{N}:\mathfrak{M}]$, die in $\mathfrak{z}$ enthalten ist und durch endlich viele Elemente erzeugt wird.

Beweis. l sei die Ordnung von $[\mathfrak{G}, \mathfrak{N}]$. Da $[\mathfrak{G}, \mathfrak{N}]$ in $\mathfrak{z}$ enthalten ist, so gilt für beliebige $A \in \mathfrak{G}$, $N \in \mathfrak{N}$

$$(A, N)^l=(A, N^l)=1^{4)}.$$

Daher ist N^l ein Element aus $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{M}=\{N^l;\ N \in \mathfrak{N}\}$ hat alle behaupteten Eigenschaften.

Beweis von Satz 1. Wir setzen

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{Z}_1 \supset \mathfrak{Z}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{Z}_n=1$$

$$\mathfrak{F}_i=\mathfrak{Z}_{i-1}/\mathfrak{Z}_i, \qquad i=2, \dots, n.$$

$\mathfrak{F}_{i_1}, \mathfrak{F}_{i_2}, \dots, \mathfrak{F}_{i_k}$ $(i_1 < i_2 < \cdots < i_k)$ seien sämtliche unendliche Gruppen unter $\mathfrak{F}_i$. Der Satz ist offenbar richtig falls $k=0$. Wir wenden also die Induktion nach k an.

Sei zunächst $i_k \neq n$. Nach dem obigen Hilfssatz, angewandt auf

$$\overline{\mathfrak{G}}=\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_{i_k+1}, \quad \overline{\mathfrak{N}}=\mathfrak{Z}_{i_k-1}/\mathfrak{Z}_{i_k+1}, \quad [\overline{\mathfrak{G}}, \overline{\mathfrak{N}}]=\mathfrak{Z}_{i_k}/\mathfrak{Z}_{i_k+1},$$

gibt es eine solche Gruppe $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{Z}_{i_k-1}$, so dass $[\mathfrak{Z}_{i_k-1}:\mathfrak{M}]$ endlich ist und $\overline{\mathfrak{M}}=\mathfrak{M}/\mathfrak{Z}_{i_k+1}$ im Zentrum von $\overline{\mathfrak{G}}$ enthalten ist. Setzt man alsdann

1) Die Klammer soll die Kommutatorbildung bedeuten.

2) Vgl. H. Zassenhaus, Lehrbuch der Gruppentheorie (1937), S. 118.

3) Vgl. H. Zassenhaus, l. c., S. 105, 119.

4) (A, N) bedeutet den Kommutator von $A, N: (A, N)=ANA^{-1}N^{-1}$. Für diese Gleichheit vgl. H. Zassenhaus, l. c., S. 57.