# 54. Über den Mittelwert der messbaren fastperiodischen Funktionen auf einer Gruppe.

Von Yukiyosi KAWADA.
Mathematisches Institut, Tokyo Bunrika Daigaku.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., June 12, 1943.)

Bekanntlich ist der Mittelwert der H. Bohrschen fastperiodischen Funktion $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ durch die Formel

$$(1) \qquad M\{f(x)\} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n}\int_{-n}^{n} f(x)dx$$

gegeben. Andererseits ist die Existenz des Mittelwertes der fastperiodischen Funktion auf einer allgemeinen Gruppe von J. von Neumann[1] festgestellt.

In der vorliegenden Note soll eine Formel für den Mittelwert der messbaren fastperiodischen Funktion auf einer im Kleinen bikompakten, zusammenhängenden abelschen Gruppe gegeben werden, aus der sich die Formel (1) als ein Spezialfall ergibt.

*Satz. Es sei $G$ eine abelsche, im Kleinen bikompakte, zusammenhändende Gruppe und $m$ das Haarsche Mass von $G$. $D$ sei eine beliebige offene, totalbeschränkte Menge von $G$. Wir bezeichnen mit $E_n$ die Menge*

$$(2) \qquad E_n = D^n = \{x_1 + \cdots + x_n\,;\ x_i \in D,\ i = 1, \dots, n\}\,.$$

*Dann gilt für jede messbare fastperiodische Funktion $f(x)$ auf $G$ die Formel*

$$(3) \qquad M\{f(x)\} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{m(E_n)}\int_{E_n} f(x)m(dx)\,,$$

*wobei $M\{f(x)\}$ den Mittelwert von $f(x)$ bedeutet.*

Wenn $G$ die additive Gruppe aller reellen Zahlen und $D = (-1, 1)$ ist, dann ist die Formel (3) nichts anders als die Formel (1).

Hierbei ist die Bedingung $E_1 \subset E_2 \subset \cdots$, $\vee_{n=1}^{\infty} E_n = G$ $\big(m(E_n) < \infty\big)$ für die Folge $\{E_n\}$ nicht genügend. Dann braucht nämlich $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{m(E_n)}\displaystyle\int_{E_n} f(x)m(dx)$ nicht zu existieren, wie man leicht anzugebenden Beispielen bestätigen kann.

Um den Satz zu beweisen, genügt es nun beiderlei zu zeigen:

(I) *Es sei $\{E_n\}$ eine Folge der messbaren Mengen $\big(m(E_n) < \infty\big)$, so dass für jedes Element $a \in G$*

$$(4) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{m(E_n)} m\big(E_n \ominus (E_n + a)\big) = 0^{2)}\,.$$

1) J. von Neumann, Almost periodic functions in a group, Trans. Amer. Math. Soc., **36** (1934), 445–492.

2) $\ominus$ bedeutet die symmetrische Differenz: $A \ominus B = (A \smile B) - (A \frown B)$.