53. Über die allgemeinen algebraischen Systeme, VI.*

Von Kenjiro SHODA.
Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Osaka.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., June 12, 1943.)

§ 19 *θ-auflösbare Systeme.* Wir werden die Resultaten vom Teil V weiter verallgemeinern. Dadurch erhält man eine zusammenfassende Darstellung der Theorie der auflösbaren Systeme und der nilpotenten Systeme.

Es sei $\mathfrak{A}$ ein primitives A-algebraisches System. Einem Untersystem $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ ordnen wir je eine Untermenge $\mathfrak{B}'$ und ein $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$ umfassendes Untersystem $\mathfrak{B}^*$ zu. Zunächst werden wir diese Zuordnung festsetzen und sie mit θ bezeichnen. Besteht B aus den Verknüpfungsgleichungen mit den Elementen $x_1, \dots, x_m, x'_1, \dots x'_n$, so betrachten wir B mit x aus $\mathfrak{B}$ und x' aus $\mathfrak{B}'$ als Relationen von $\mathfrak{B}^*$. Dadurch erhält man ein Restklassensystem von $\mathfrak{B}^*$ und folglich ein von $\mathfrak{B}$. Das erste bezeichnen wir mit $\mathfrak{B}(\theta)$. Durch kleine Modifizierung kann man die im Teil V angegebenen Sätze auf unseren allgemeinen Fall übertragen, wie folgt.

Es sei $\mathfrak{A}_1$ zu $\mathfrak{A}$ homomorph. Sind $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}'_1, \mathfrak{B}^*_1$ die Bilder von $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \mathfrak{B}^*$ bei der homomorphen Abbildung von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{A}_1$, so erhält man eine Zuordnung θ_1 in $\mathfrak{A}_1$, wenn man dem Untersystem $\mathfrak{B}_1$ die Bilder $\mathfrak{B}'_1, \mathfrak{B}^*_1$ zuordnet. θ_1 wird offenbar durch θ nicht eindeutig bestimmt. Wir haben nur ein θ_1 beliebig festzusetzen. Dann ist $\mathfrak{B}_1(\theta_1)$ zu $\mathfrak{B}(\theta)$ homomorph. Ist nämlich $\overline{\mathfrak{B}}^*$ das zu $\mathfrak{B}^*_1$ isomorphe Restklassensystem von $\mathfrak{B}^*$, so ist die durch B definierte Kongruenz in $\mathfrak{B}^*_1$ gleichbedeutend mit der durch B definierten Kongruenz in $\mathfrak{B}^*$ nach $\overline{\mathfrak{B}}^*$. D. h. $\mathfrak{B}_1(\theta_1)$ ist zur Vereinigung von $\mathfrak{B}(\theta)$ und $\overline{\mathfrak{B}}^*$ isomorph, also ist es zu $\mathfrak{B}(\theta)$ homomorph.

Sind ferner $\mathfrak{B}(\theta)=\mathfrak{B}^*/\mathfrak{B}^\theta$, $\mathfrak{B}_1(\theta_1)=\mathfrak{B}^*_1/\mathfrak{B}^{\theta_1}_1$, so ist $\mathfrak{B}^{\theta_1}_1$ zu $\mathfrak{B}^\theta$ homomorph. Setzt man nämlich $\mathfrak{B}^*_1=\mathfrak{B}^*/\mathfrak{D}$, so ist $\mathfrak{B}^*_1/\mathfrak{B}^{\theta_1}_1$ zur Vereinigung $\mathfrak{B}^*/\mathfrak{B}^\theta \cup \mathfrak{D}$ der beiden Restklassensysteme $\mathfrak{B}^*/\mathfrak{B}^\theta$ und $\mathfrak{B}^*/\mathfrak{D}$ isomorph. Berüchsichtigt man die isomorphe Zuordnung von $\mathfrak{B}^*_1$ und $\mathfrak{B}^*/\mathfrak{D}$, so erkennt man den Isomorphismus von $\mathfrak{B}^{\theta_1}_1$ auf $\mathfrak{B}^\theta \cup \mathfrak{D}/\mathfrak{D}$, also nach dem zweiten Isomorphiesatz den von $\mathfrak{B}^{\theta_1}_1$ auf ein $\mathfrak{B}^\theta/\mathfrak{B}^\theta \cap \mathfrak{D}$. Damit ist der Homomorphismus von $\mathfrak{B}^\theta$ auf $\mathfrak{B}^{\theta_1}_1$ bewiesen.

Sind $\mathfrak{B}'_1 \subseteq \mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}^*_1 \subseteq \mathfrak{B}^*$ für $\mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{B}$, so heisst die Zuordnung θ eine *ordnungshomomorphe.* Dann ist $\mathfrak{B}^\theta_1 \subseteq \mathfrak{B}^\theta$. Definitionsgemäss besteht $\mathfrak{B}^\theta_1$ bzw. $\mathfrak{B}^\theta$ nämlich aus den mit dem Nullelement kongruenten Elemente aus $\mathfrak{B}^*_1$ bzw. $\mathfrak{B}^*$. Ist B^*_1 bzw. B^* die Menge aller Folgerelationen von B in $\mathfrak{B}^*_1$ bzw. $\mathfrak{B}^*$, so ist ersichtlich $B^*_1 \subseteq B^*$, also ist $\mathfrak{B}^\theta_1 \subseteq \mathfrak{B}^\theta$.

---

* I in Proc. **17** (1941), 323–327; II ebenda **18** (1942), 179–184; III ebenda **18** (1942), 227–232; IV ebenda **18** (1942), 276–279; V ebenda **19** (1943), 120–124.