71. *Bemerkungen über das Weilsche Mass auf einer abelschen Gruppe.*

Von Yukiyosi KAWADA.

Mathematisches Institút, Tokyo Bunrika Daigaku.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., July 12, 1943.)

Im folgenden sollen die Weilschen Sätze[1] über die Beziehungen zwischen den Massen und den Topologien in einer Gruppe für den Fall, wo diese Gruppe abelsch ist, als Anwendung der Theorie der normierten Ringe hergeleitet werden. Als Muster gelten dabei die Arbeiten von I. Gelfand, D. Raikov und M. Krein[2] über die Theorie der Charaktere der abelschen Gruppen. Ihre Methode gilt teilweise auch in unserm Fall.

1. G sei eine abelsche Gruppe mit Elementen $0, x, y, \dots$

Def. 1. Ein auf G definiertes Carathéodorysches reguläres äusseres Mass m heisst *Weilsch*[3], falls es die folgenden Eigenschaften hat:

(i) $$m(E+a)=m(E) \quad \text{für alle} \quad E \subset G,$$

(ii) $f(x-y)$ ist messbar in bezug auf das Produktmass $m \times m$ auf $G \times G$, falls $f(x)$ eine reellwertige m-messbare Funktion auf G ist,

(iii) $$G=\vee_{n=1}^{\infty} E_n, \quad m(E_n)<\infty \quad (n=1, 2, \dots).$$

Wir nennen ein Mass m *Weilsch im weiteren Sinne*, wenn statt (iii) die folgende Bedingung (iii′) erfüllt ist:

(iii′) Aus $A=\vee_{n=1}^{\infty} A_n$, $B=\vee_{n=1}^{\infty} B_n$, $m(A_n)<\infty$, $m(B_n)<\infty$ folgt $A-B=\{x-y;\ x \in A,\ y \in B\}=\vee_{n=1}^{\infty} C_n$, $m(C_n)<\infty$ $(n=1, 2, \dots)$.

Def. 2. Es sei μ ein Carathéodorysches reguläres äusseres Mass auf Ω, und m sei ein Weilsches Mass im weiteren Sinne auf G. Wir heissen $\{T_x;\ x \in G\}$ *eine messbare Strömung* mit dem Parameter $x \in G$, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) T_x ist eine eineindeutige Abbildung von Ω auf sich mit $\mu(E)=\mu(T_x E)$,

---

1) A. Weil, [I] Sur les groupes topologiques et les groupes mesurés, C. R. Acad. Sci. Paris, **202** (1936), 1147–1149. [II] L'integration dans les groupes topologiques et ses applications, Actualité, **863** (1940). K. Kodaira, [I] Über die Beziehungen zwischen den Massen und Topologien in einer Gruppe, Proc. Phy-math. Soc. Japan, **23** (1941), 67–119. [II] Über die Gruppe der messbaren Abbildungen, Proc. Imp. Acad. Tokyo, **17** (1941), 18–23.

2) I. Gelfand und D. Raikov, On the theory of characters of commutative topological groups, C. R. Acad. Sci. URSS., **28** (1940), 195–198. D. Raikov, [I] Positive definite functions on commutative groups with an invariant measure, ibid., **28** (1940), 296–300. M. Krein, Sur une géneralisation du théorème de Plancherel au cas des integrales de Fourier sur les groupes topologiques commutatifs, ibid., **30** (1941), 484–488. D. Raikov, [II] Generalized duality theorem for commutative groups with an invariant measure, ibid., **30** (1941), 589–591.

3) Vgl. K. Kodaira, [I] loc. cit. 1), S. 91.