110. Über das Helmholtzsche Raumproblem, II.

Von Shôkichi IYANAGA und Makoto ABE.
Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Nov. 12, 1943.)

§1. Unsere frühere Note über den gleichen Gegenstand[1] enthält ein Versehen, das jetzt berichtigt werden soll. Es bezieht sich auf die Kongruenz des Winkels $<(\alpha'\beta')$ mit dem umgeklappten Winkel $<(\beta'\alpha')$, oder kurz die "Winkelsymmetrie": $<(\alpha'\beta')\equiv<(\beta'\alpha')$. In H wurde behauptet, dass dies unter den Annahmen I, II des Satzes a. a. O. (der freien Beweglichkeit des ganzen Raumes und der der Teilräume) eine Folge der Pythagoreizität des Körpers K ist[2]. Das war aber nicht richtig; in einem von Hilbert angegebenen, geordneten und *pythagoreischen* Körper lässt sich nämlich eine Geometrie konstruieren, in der zwar die freie Beweglichkeit des ganzen Raumes sowie die der Teilräume, jedoch nicht die Winkelsymmetrie gilt[3]. Der Satz und Zusatz in H müssen folgendermassen umformuliert werden.

Satz. *Es sei (wie in H) K ein geordneter Körper, $R=R^n(K)$ ein n-dimensionaler affiner Raum über K, $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}^n(K)$ die Gruppe aller affinen Transformationen von R. Als geordnetes Paar von Halbgeraden α', β', die von einem und demselben Punkt ausgehen, wird der Winkel $<(\alpha'\beta')$ erklärt.*

Eine Untergruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{A}$ erfülle nun folgende Bedingungen:

I. *Die Forderung der freien Beweglichkeit,*[4]

II. *Die Forderung der freien Beweglichkeit für Teilräume,*[4]

III. *Die Forderung der Winkelsymmetrie: Ist $<(\alpha'\beta')$ ein beliebiger Winkel, so gibt es eine Transformation T von $\mathfrak{G}$, sodass $T(\alpha')=\beta'$ und $T(\beta')=\alpha'$ gilt.*

Existiert eine solche Untergruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{A}$, so ist der Körper K notwendig pythagoreisch, und $\mathfrak{G}$ ist als diejenige Untergruppe von $\mathfrak{A}$ charakterisiert, deren Transformationen eine bestimmte positiv-definite quadratische Form der Koordinatendifferenzen je zweier Punkte des Raumes — den „Abstand" dieser Punkte — invariant lassen.

Zusatz. *$\mathfrak{G}_0$ sei eine Untergruppe von $\mathfrak{A}$, deren Transformationen einen Punkt O des Raumes festlassen. $\mathfrak{G}_0$ genüge ferner den Bedingungen der „freien Beweglichkeit um den Punkt O*[5]*", und der Forderung der Winkelsymmetrie für die Winkel mit dem Scheitel O.*

---

1) Über das Helmholtzsche Raumproblem, diese Proc. 19, S. 174, im folgenden zit. mit H. Die Bezeichnungen in H benutzen wir auch in vorliegender Note.

2) Vgl. H. S. 176ff., insb. die Anm. 6) auf S. 177. Der Fehlschluss liegt darin, dass wir auf S. 178 im Absatz 7) aus $<Q_1OQ_2\equiv<Q_2OQ_1'$ das Senkrechtstehen der Geraden Q_1Q_1' und Q_2Q_2' folgerten. Nach unserer Definition des rechten Winkels wäre dies erst dann erlaubt, wenn etwa $<Q_2OQ_1'\equiv<Q_1'OQ_2$ bewiesen würde!

3) D. Hilbert. Grundlagen der Geometrie, 7. Aufl. S. 135. Dieses Buch wird im folgenden mit G zitiert.

4) Siehe H. S. 175.

5) Siehe H. S. 179.