# 94. Über das Haarsche Mass in der lokal bikompakten Gruppe.

Von Shizuo KAKUTANI.
Mathematisches Institut der Kaiserlichen Universität, Osaka.
Kunihiko KODAIRA.
Physikalisches Institut der Kaiserlichen Universität, Tokyo.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., July 12, 1944.)

Zur Definition des Haarschen Masses $m$ in einer lokal bikompakten, nicht separablen Gruppe gibt es zwei Möglichkeiten. Nach der ersten gewöhnlichen Definition wird $m$ zunächst für alle Borelschen Mengen erklärt und dann zum vollständigen Mass vervollständigt; nach der zweiten wird dagegen $m$ zunächst nur für die Mengen mit Baireschen charakteristischen Funktionen — wir wollen solche Menge Bairesch nennen[1) — definiert und dann vervollständigt. Sind nun diese zwei Definitionen äquivalent ?[2) In der vorliegenden Note soll diese Frage bejahend beantwortet werden[3). Dabei benutzen wir die „*Quasi-separabilität*“ der lokal bikompakten Gruppe, d. h. dass jede solche Gruppe als eine separable betrachtet werden kann, solange man mit höchstens abzählbar vielen Baireschen Funktionen zu tun hat. (Für den genauen Sinn dieser Behauptung siehe unten, § 3.)

§ 1. *Borelsche und Bairesche Mengen.* Es sei $\Omega$ ein lokal bikompakter Raum mit der Eigenschaft: *$\Omega$ lässt sich als Summe höchstens abzählbar vieler bikompakter Teilmengen $\Omega_k$ darstellen*:

$$\text{(a)} \qquad \Omega=\sum_{k=1}^{\infty}\Omega_k\,, \qquad \Omega_k:\ \text{bikompakt.}$$

Eine Teilmenge $B$ aus $\Omega$ heisst bekanntlich *Borelsch*, wenn sie zum alle offenen Mengen enthaltenden minimalen Borelschen Mengenkörper gehört. *Wir bezeichnen mit $\mathfrak{B}(\Omega)$ die Familie aller Borelschen Teilmengen von $\Omega$.* Andererseits nennen wir eine Familie $\mathfrak{f}$ der (reellen) Funktionen $f(p)$ auf $\Omega$ *Bairesch*, wenn i) $\mathfrak{f}$ ein Ring im algebraischen Sinne ist und 1 (die Funktion mit dem konstanten Wert 1) enthält, und ii) aus $f(p)=\lim_{k\to\infty}f_k(p)$, $f_k(p)\in\mathfrak{f}$ die Relation $f(p)\in\mathfrak{f}$ folgt. Eine Funktion $f(p)$ aus $\Omega$ heisst *Bairesch*, wenn sie zur alle stetigen Funktionen enthaltenden minimalen Baireschen Familie gehört.

Definition 1. *Eine Teilmenge $B\subset\Omega$ heisst Bairesch, wenn ihre charakteristische Funktion $c_B(p)$ Bairesch ist.*

---

1) Vgl. K. Kodaira: [1] Über die Gruppe der messbaren Abbildungen, diese Proc. **17** (1941), 18-23; [2] Über die Beziehung zwischen den Massen und den Topologien in einer Gruppe, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, **23** (1941), 67-119, Kap. II. In diesen beiden Arbeiten haben wir die Menge mit Bairescher charakteristischer Funktion „Borelsch“ genannt.

2) Vgl. K. Kodaira: [2], S. 80.

3) Für die „Torusgruppe“ ist dieses Problem von S. Kakutani gelöst. Vgl. S. Kakutani: [1] Notes on infinite product measure spaces, II. Proc. **19** (1943), 184-188.