93. *La structure des fonctions projectives, I.*

Par Motokiti KONDÔ.
L'institut mathématique, l'université impériale de Kyusyu, Fukuoka.
(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., July 12, 1944.)

Parmi le domaine des fonctions définies effectivement, il y a diverses classes de celles-ci, mais une de celles très importantes est la classe des fonctions projectives et au point de vue de MM. C. Kuratowski et A. Tarski, toutes les fonctions définies individuellement appartiennent à cette classe. Donc, la recherche des fonctions de cette classe est plus haut desirée et le but de cette note est de donner quelques propriétés de celles-ci.

1. D'après la définition de M. N. Lusin[1], on dit qu'une fonction est projective quand son image géométrique est projective. Or, pour envisager la relation pareille entre les fonctions projectives et les ensembles projectifs, il n'est pas utile et donc nous les définirons en quelque autre forme par l'induction mathématique. Soit R un espace métrique, complet et séparable. On dit alors qu'une fonction $F(x)$ définie sur R est projective de la classe A_1 (ou bien C_1) quand il existe une fonction $F(x, y)$ de Baire définie sur l'espace produit $R\times I$, où I désigne l'ensemble de tout les nombres réels, et qui remplit la condition

$$(*)\quad \underset{-\infty<y<+\infty}{\text{borné sup.}} F(x,y)=F(x) \quad \Big(\text{ou bien } \underset{-\infty<y<+\infty}{\text{borné inf.}} F(x,y)=F(x)\Big),$$

et qu'une fonction est projective de la classe B_1, quand elle est de la classe A_1 et C_1 en même temps. Nous supposons maintenant que les fonctions projectives de la classes A_k, B_k et C_k $(k=1, 2, \dots, n)$ soient déjà définies. On dit alors qu'une fonction $F(x)$ définie sur R est projective de la classe A_{n+1} (ou bien C_{n+1}) quand il existe une fonction $F(x, y)$ de la classe C_n (ou bien de la classe A_n) définie sur $R\times I$ et remplit la condition (*), et enfin qu'une fonction est projective de la classe B_{n+1} quand elle est de la classe A_{n+1} et C_{n+1} en même temps. La famille des fonctions ainsi définies coincide précisément avec celle des fonctions projectives au sens de M. N. Lusin comme nous verrons tard.

2. Le problème posé d'abord est la caractérisation des fonctions de ces classes. Nous avons pour ce problème le

Théorème 1. *Pour qu'une fonction $F(x)$ définie sur R, où R désigne un espace métrique, complet et séparable, est projective de la classe A_n ou bien B_n ou bien C_n, il faut et il suffit que les ensembles*

$$Ens\big(F(x)\geqq r\big)$$

sont pour tous les nombres réels r projectifs de la classe A_n ou bien B_n ou bien C_n respectivement.

Théorème 2. *Pour qu'une fonction $F(x)$ définie sur R est projective de la classe B_n, il faut et il suffit que les ensembles*

1) N. Lusin, Leçons sur les ensembles analytiques. Paris, 1930.