# 17. Sur la représentation de Villat pour les fonctions analytiques définies dans un anneau circulaire concentrique.

Par Yûsaku KOMATU.
Institut de Mathématiques, Université Impériale de Tokyo.
(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Feb. 12, 1945.)

On se donne un domaine annulaire, soit, un domaine doublement connexe sur un plan complexe dont les composantes de frontière sont deux continua arbitraires n'ayant aucun point commun. On peut, alors, lui donner un *module* $\lg\frac{1}{q}(0<q<1)$ comme une invariante conforme, une seule essentiellement, et le représenter conformément sur l'anneau circulaire concentrique $q<|z|<1$ qui peut être regardé comme étant une sorte d'un domaine normal. A cause de ce fait, si nous voulons traiter les problèmes sur les fonctions analytiques définies dans les domaines annulaires, la représentation de Villat correspondant à celle de Poisson pour un domaine circulaire dans le cas de domaines simplement connexes nous donne souvent une méthode très féconde[1]. Voici la représentation de Villat.

*Dans l'anneau circulaire concentrique $q<|z|<1$, une fonction analytique régulière $\Omega(z)$, dont la partie réelle $U(z)=\Re\Omega(z)$ donne la solution du problème de Dirichlet ayant, comme les valeurs-frontières,*

$$U(z)\to\begin{cases} M(\varphi) & (z\to e^{i\varphi}), \\ N(\varphi) & (z\to qe^{i\varphi}), \end{cases}$$

*peut être écrite sous la forme suivante:*

$$\Omega(z)=\frac{\omega_1}{\pi^2 i}\int_0^{2\pi}M(\varphi)\left\{\zeta\left(\frac{\omega_1}{\pi}(i\lg z+\varphi)\right)-\left(\frac{1}{2\omega_3}-\frac{\eta_1}{\pi i}\right)\lg z\right\}d\varphi$$
$$-\frac{\omega_1}{\pi^2 i}\int_0^{2\pi}N(\varphi)\left\{\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{\pi}(i\lg z+\varphi)\right)-\left(\frac{1}{2\omega_3}-\frac{\eta_1}{\pi i}\right)\lg z\right\}d\varphi+ic,$$

*où $c$ est une constante réelle pouvant être choisie arbitrairement, et toutes les notations pour les fonctions elliptiques appartiennent à celles dont les périodes primitives sont un nombre réel $2\omega_1$ et un nombre imaginaire pure $2\omega_3$ satisfaisant à la relation*

$$\frac{\omega_3}{\omega_1}=\frac{i}{\pi}\lg\frac{1}{q}.$$

---

1) En ce qui concerne ses applications à la représentation conforme, voir, par exemple, les Notes du présent auteur: Untersuchungen über konforme Abbildung von zweifach zusammenhängenden Gebieten, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, **25** (1943), 1-42; Darstellungen der in einem Kreisringe analytischen Funktionen nebst den Anwendungen auf konforme Abbildung über Polygonalringgebiete, Jap. Journ. Math., (sous presse).