J. Math. Soc. Japan
Vol. 30, No. 3, 1978

Sur le problème de Cauchy pour des équations faiblement hyperboliques

Par Kiyoshi YOSHIDA

(Reçu le 26 avril, 1977)

Soit $L\left(t, x; \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ un polynôme différentiel défini dans $\Omega=\{(t, x); t\in[0, T], x\in R^n\}$ de la forme

$$L=\frac{\partial^m}{\partial t^m}+\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{j+|\nu|\leq m} a_{j,\nu}(t, x)\frac{\partial^j}{\partial t^j}\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu},$$

où $a_{j,\nu}(t, x)$ sont des fonctions indéfiniment différentiables et bornées avec leurs dérivées. Considérons le problème de Cauchy

$$(1)\qquad \begin{cases} L\left(t, x; \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u=f & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial^j u}{\partial t^j}(0, x)=u_j(x), & j=0, 1, \cdots, m-1 \end{cases}$$

pour les données f et u_j. Alors il s'agit de trouver la condition pour qu'il y ait une seule solution u et que la solution u dépende continûment des données f et u_j. Ce problème est recherché depuis J. Hadamard [3] et il n'est pas encore complètement résolu au cas des coefficients variables. Quand on peut trouver une solution u mentionnée ci-dessus dans un espace des fonctions E, nous disons d'après Hadamard que le problème de Cauchy est bien posé dans l'espace E ou simplement bien posé si l'on l'entend bien. S. Mizohata a démontré, dans [7], que si le problème de Cauchy est bien posé dans C^∞, alors toutes les racines $\lambda_j(t, x; \xi)$ du polynôme caractéristique $P(t, x; \tau, \xi)$ (la partie homogène de degré m de L) sont nécessairement réelles pour des vecteurs ξ réels non nuls. On sait également que si les racines du polynôme caractéristique sont réelles et distinctes, alors le problème de Cauchy est bien posé dans L^2 (cf. [8]). Au contraire, T. Kano [5] a montré, par reductio absurdum, que cette condition est nésessaire dans l'hypothèse que la multiplicité des racines caractéristiques ne dépend pas de t, x et ξ. Dans [4, 4'] M. Itano et l'auteur ont démontré, par une méthode directe, que l'on a le résultat de Kano sans l'hypothèse. En traitant le problème de Cauchy dans l'espace des fonctions indéfiniment différentiables, on doit considérer la multiplicité des racines caractéristiques. Au cas