J. Math. Soc. Japan
Vol. 26, No. 3, 1974

Représentations unitaires monomiales d'un groupe discret, en particulier du groupe modulaire

Par Masahiko SAITO

(Reçu le 28 mai, 1973)

Introduction.

Un groupe discret n'est que rarement de type I, ce qui nous empêche d'en bien exploiter la théorie des représentations unitaires. Dans ce travail, nous obtiendrons certains résultats concernant les représentations unitaires monomiales induites d'un sous-groupe ouvert satisfaisant à une certaine condition d'un groupe localement compact, et les appliquerons aux groupes algébriques et au groupe modulaire.

Ce mémoire se divise en deux parties. Dans la première partie (§ 1-§ 3), on introduit une condition dite $(\mathcal{F}_0)$ pour un sous-groupe ouvert H d'un groupe localement compact G, et une condition dite $(\mathcal{F})$ pour un ensemble $\mathcal{A}$ de sous-groupes ouverts de G. Le Théorème 1 donnera la dimension de l'espace des opérateurs d'entrelacement d'une représentation unitaire monomiale induite de H avec elle-même, et un critère simple et commode de son irréductibilité. Le Théorème 2 montrera que deux représentations unitaires monomiales induites de sous-groupes dans $\mathcal{A}$ sont ou bien équivalentes ou bien disjointes, et donnera un bon critère de leur équivalence. Ces résultats sont analogues à ceux de G. W. Mackey [2] et y ajoutent des renseignements plus précis.

Soient G un groupe algébrique linéaire connexe défini sur un corps parfait infini k, $G(k)$ le groupe des points rationnels sur k de G muni de la topologie discrète et $\mathcal{A}$ l'ensemble des sous-groupes $H(k)$ de $G(k)$, où H parcourt les sous-groupes fermés connexes de G. Alors $\mathcal{A}$ satisfait à la condition $(\mathcal{F})$ (Théorème 3). En particulier, si k est algébriquement clos ou si G est réductif, les représentations monomiales de $G(k)$ induites de $P(k)$, P étant un sous-groupe parabolique de G défini sur k, sont toutes irréductibles.

Dans la deuxième partie (§ 4-§ 9), on applique ces résultats au groupe modulaire $G=SL(2, \boldsymbol{Z})$ et à ses sous-groupes de Cartan, et en fait une étude détaillée. On établit d'abord une correspondance biunivoque entre certaines classes de formes quadratiques binaires F et les classes de conjugaison de sous-groupes de Cartan $H(F)$ de G. L'ensemble $\mathcal{A}$ des sous-groupes de Cartan de G satisfait à la condition $(\mathcal{F})$. Les formes quadratiques se divisent en