Tôhoku Math. J.
45 (1993), 423–436

LE GROUPE AFFINE COMME VARIETE SYMPLECTIQUE

MARTIN BORDEMANN, ALBERTO MEDINA AND ALI OUADFEL

(Received March 3, 1992)

Abstract. For a Lie group carrying a left invariant symplectic form certain Lagrangian foliations are considered. We describe all left invariant (exact) symplectic structures on the affine group $K^n \times GL(K^n)$ for $K=\boldsymbol{R}$ or $\boldsymbol{C}$. It is shown that for some of these structures there exists an exact symplectic embeding of the real affine group onto an open subset of the cotangent bundle of the Euclidean group $\boldsymbol{R}^n \times SO(n)$.

Soit $G=GA(\boldsymbol{K}^n)=\boldsymbol{K}^n \times GL(\boldsymbol{K}^n)$ le groupe des transformations affines de $\boldsymbol{K}^n$, $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$ ou $\boldsymbol{C}$ et $\mathfrak{g}=\mathrm{aff}(\boldsymbol{K}^n)=\boldsymbol{K}^n \times \mathrm{End}(\boldsymbol{K}^n)$ l'algèbre de Lie de G. Il est connu que G admet des formes symplectiques invariantes à gauche. Comme le groupe de cohomologie scalaire $H^2(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ est nul ([$M-R$]) ces formes s'écrivent comme $\Omega=dv$ où v est une 1-forme différentielle invariante sur G et elles correspondent à des orbites ouvertes de la représentation co-adjointe de G. Dans [D-M] il a été montré que la composante connexe de l'unité G_0 de $GA(\boldsymbol{K}^{n-1})$ peut être obtenue par réduction symplectique de (G, Ω) suivant l'orthogonal symplectique $(\boldsymbol{K}^n)^{\perp}$ du sous-groupe $\boldsymbol{K}^n$ de G.

Ici nous caractérisons de plusieurs façons les éléments de $\mathfrak{g}^*$ à orbite ouverte pour la représentation co-adjointe de G_0 (théorèmes 2.1 et 2.5). Nous prouvons que (G, Ω) admet deux feuilletages symplectiques invariants à gauche transverses (théorème 3.1, corollaire 3.2) en raffinant le résultat de [D-M] cité ci-dessous.

Nous démontrons l'existence d'un sous-fibré intégrable lagrangien L de TG, invariant par les translations à gauche inclus dans le noyau de la 1-forme v. Ceci nous permet d'identifier (G_0, dv) à un ouvert du cotangent de la variété quotient $Q=G/\mathfrak{L}$ où $\mathfrak{L}$ est le feuilletage associé à L (théorème 3.3). Le fait que les feuilles de $\mathfrak{L}$ soient fermées est une conséquence du théorème 1.1. En particulier (G_0, dv) s'identifie à un ouvert de $T^*(SO(n))$ si $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$.

Dans la suite l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}=L(G)$ d'un groupe de Lie G s'identifie à $T_\varepsilon(G)$ où ε désigne l'élément neutre de G. Pour X dans $\mathfrak{g}$, on désigne par X^+ (resp. X^-) le champ de vecteurs invariant à gauche (resp. invariant à droite) sur G défini par X. Par forme symplectique sur G invariant on entend une forme symplectique invariante à gauche.

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 53C30; Secondary 53C15, 17B99.

Key words: Left invariant symplectic forms, left invariant foliations, affine group, exact symplectic embedding.