Tôhoku Math. J.
48 (1996), 363–390

DIVISEURS INVARIANTS ET HOMOMORPHISME DE POINCARÉ DE VARIÉTÉS TORIQUES COMPLEXES

GOTTFRIED BARTHEL, JEAN-PAUL BRASSELET, KARL-HEINZ FIESELER ET LUDGER KAUP

(Received February 27, 1995, revised November 10, 1995)

Résumé. Le but de cet article est de comparer, pour une variété torique complexe, d'une part l'inclusion naturelle des classes de diviseurs invariants de Cartier dans ceux de Weil, d'autre part l'homomorphisme de dualité de Poincaré entre la cohomologie entière en dimension deux et l'homologie entière, à supports fermés, en dimension complémentaire. Si le groupe fondamental de la variété est fini, nous montrons que l'homomorphisme naturel "classes de Chern" du groupe de classes de diviseurs invariants de Cartier dans la cohomologie et l'homomorphisme "classe d'homologie" du groupe de classes de diviseurs invariants de Weil dans l'homologie sont tous deux des isomorphismes. On en déduit l'identification de l'inclusion de ces groupes de classes de diviseurs avec l'homomorphime de dualité de Poincaré. Nous étendons ce résultat au cas d'une variété torique quelconque, en utilisant des formules de Künneth adaptées.

Les groupes de classes de diviseurs invariants de Cartier et de Weil—et donc aussi les groupes de (co-)homologie correspondants—s'interprètent en termes des données combinatoires et géométriques de l'éventail qui définit la variété torique. Cette interprétation nous permet d'aborder les problèmes d'invariance des nombres de Betti des variétés toriques.

Abstract. For a complex toric variety, we compare the natural inclusion of the group of classes of invariant Cartier divisors into that of Weil divisors on the one hand, and the Poincaré duality homomorphism between the second integral cohomology and the integral homology (with closed supports) in complementary degree on the other. If the variety has finite fundamental group, we prove that the natural "Chern class homomorphism" from the group of classes of invariant Cartier divisors to cohomology and the "homology class map" from the group of classes of invariant Weil divisors to homology are both isomorphisms, thus identifying the inclusion of these divisor class groups with the Poincaré duality homomorphism. Using suitable Künneth formulae, that yields a result valid in the general case.

These groups of classes of invariant divisors—and hence the corresponding (co-)homology groups—have explicit descriptions in terms of combinatorial-geometric data of the fan that defines the toric variety. As an application, we use these to discuss problems of invariance of Betti numbers for toric varieties.

Introduction. Les variétés toriques sont des objets particulièrement intéressants, notamment à cause de leur relation étroite avec la géométrie convexe élémentaire. L'opération du tore donne lieu à une décomposition finie d'une telle variété en orbites, toutes isomorphes à des tores, et fournit une correspondance biunivoque entre les orbites

1991 *Mathematics Subject Classification*. Primary 14M25; Secondary 14C20, 14F25.