Michigan Math. J. 51 (2003)

Les Applications Monomiales en Deux Dimensions

Charles Favre

Introduction

Soit $\varphi\colon \mathbb{P}^2 \circlearrowleft$ une application rationnelle de l'espace projectif, de degré topologique $e \geq 1$, et dont l'action sur le groupe de Picard est donnée par un entier $\deg(\varphi)$ que l'on supposera toujours plus grand que 2. On vérifie que la suite des degrés $\deg(\varphi^n)$ est sous-multiplicative; on notera $\lambda_1 = \lim_n \deg(\varphi^n)^{1/n}$ le premier degré dynamique de φ (voir [6]). Les principales propriétés ergodiques de φ dépendent étroitement du rapport λ_1/e (voir [4]). Lorsque $\lambda_1 > e$ (resp. $\lambda_1 < e$), il est ainsi conjecturé que la plupart des points périodiques sont de type hyperboliques selles (resp. répulsifs). Il apparaît donc important de comprendre précisément la nature de la suite $\deg(\varphi^n)$. De manière générique, cette suite est multiplicative $\deg(\varphi^n) = \deg(\varphi)^n$, et par suite $\lambda_1 = \deg(\varphi)$. En général cependant, la situation est perturbée par l'existence de courbes contractées par φ ou l'un de ses itérés sur un point d'indétermination. On est donc amené à introduire la définition suivante [2].

Définition. Une application $\varphi\colon X \circlearrowleft$ d'une surface rationnelle est dite algébriquement stable (AS en abrégé) si $\bigcup_{k\geq 0} \varphi^{-k} I(\varphi)$ est une union dénombrable de points, où $I(\varphi)$ dénote l'ensemble d'indétermination de φ.

Il est équivalent de supposer que l'action naturelle φ^* de φ sur $\mathrm{Pic}(X)$ est composable au sens où $\varphi^{n*} = \varphi^{*n}$ pour tout $n \geq 1$. Lorsque φ est AS, λ_1 s'identifie au rayon spectral de φ^* (voir par exemple [1]), le type de croissance des degrés se ramène alors à la description du spectre de φ^*. Pour les applications birationnelles de surfaces, on peut montrer l'existence d'un modèle birationnel de $\mathbb{P}^2$ dans lequel φ devient AS, et ainsi décrire précisément la nature de $\deg(\varphi^n)$ [1]. Nous nous proposons de décrire des exemples simples d'applications rationnelles pour lesquels il est impossible de trouver un modèle birationnel dans lequel celles-ci deviennent AS. Cependant la croissance des degrés de ces applications est complètement élémentaire à décrire, et confirme les conjectures suivantes.

Conjecture A. *Soit $\varphi\colon \mathbb{P}^2 \circlearrowleft$ une application rationnelle telle que $e^2 < \lambda_1$. Alors il existe un modèle birationnel $\bar{X}$ de $\mathbb{P}^2$, et un revêtement ramifié $h\colon X \to \bar{X}$ tels que φ se relève à X et devient AS.*

Received May 2, 2002. Revision received October 1, 2002.