J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
31-3 (1991), 807–812

Sur une question de compacité linéaire

By

Mohamed TABAÂ

§ 1. Introduction

Etant donnés un anneau noethérien intègre A et K son corps des fractions. Dans [1], Ballet a montré que K est A-linéairement compact pour la topologie discrète si et seulement si A est local complet de dimension 1. La compacité linéaire pour la topologie discrète est équivalente à la compacité linéaire pour la topologie d'anneau, localement bornée T_A, où T_A est la topologie A-linéaire sur K qui admet pour système fondamental de voisinages de 0 les idéaux non nuls de A. Dans le paragraphe 3, nous montrons que si $\mathscr{T}$ est une topologie d'anneau A-linéaire non discrète séparée sur K, alors $\mathscr{T}$ est linéairement compacte et localement bornée si et seulement si A est de dimension 1 et K est complet pour $\mathscr{T}$; dans ce cas la clôture intégrale A' de A est un anneau de valuation discrète et $\mathscr{T}$ est égale à $T_{A'}$. Ce théorème généralise le résultat de Ballet et donne une réponse à la question posée par Jebli dans [7].

§ 2. Rappels

Soient A un anneau et E un A-module. On dit qu'une topologie linéaire sur E est linéairement compacte si elle est séparée et si toute base de filtre sur E formée de variétés linéaires affines admet au moins un point adhérent.

Rappelons les résultats sur les modules linéairement compacts que nous allons utiliser dans la suite ([3], chap. 3, § 2, exercices).

Proposition A. *Si E est un module linéairement compact, F un sous-module fermé de E, alors F et E/F sont linéairement compacts.*

Proposition B. *Si E est un module linéairement compact, alors pour toute topologie linéaire sur E moins fine que la topologie donnée, E est complet.*

Proposition C. *Si E est un module muni d'une topologie linéaire séparée et si M est un sous-module linéairement compact de E, alors pour tout sous-module fermé F de E, $M + F$ est fermé dans E.*

Proposition D. *Si E est un module linéairement compact, M un sous-module fermé de E, $\mathscr{B}$ une base de filtre formée de sous-modules fermés N, alors:*

$$\bigcap_{N\in\mathscr{B}} (M + N) = M + \bigcap_{N\in\mathscr{B}} N$$

Received 25 October 1989