J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
33-4 (1993) 1071-1096

Finitude des lacunes dans le spectre de l'opérateur de Schrödinger et de celui de Dirac avec des potentiels electrique et magnétique périodiques

Par

Alain GRIGIS et Abderemane MOHAMED

§1. Introduction et énoncé des résultats

On considère sur $\mathbf{R}^n$ un réseau $\Gamma = \{a; a = \sum_{j=1}^n k_j e_j,\ k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbf{Z}^n\}$, où $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de $\mathbf{R}^n$. Le réseau dual sera noté Γ^*,

$$\Gamma^* = \{\gamma \in \mathbf{R}^n; \gamma a \in 2\pi\mathbf{Z}, \forall a \in \Gamma\}.$$

Soit $V(x)$ une fonction réelle définie sur $\mathbf{R}^n$ et Γ-périodique,

$$V(x - a) = V(x), \qquad \forall a \in \Gamma. \tag{1.1}$$

Si $V(x) \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$, il est connu que l'opérateur de Schrödinger,

$$H_V = -\Delta + V(x), \tag{1.1'}$$

est essentiellement auto-adjoint, c'est à dire qu' il admet une unique extension auto-adjointe sur $L^2(\mathbf{R}^n)$ que nous noterons aussi H_V et qui contient $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, les fonctions indéfiniment dérivables et à support compact, dans son domaine. Quitte à faire une translation du spectre de H_V, $\mathrm{sp}(H_V)$, en ajoutant à $V(x)$ une constante, on se ramenera au cas où la moyenne de $V(x)$ sur le tore $\mathbf{T}^n = \mathbf{R}^n/\Gamma$ est nulle

$$\int_{\mathbf{T}^n} V(x)dx = 0. \tag{1.1''}$$

Les spectre de H_V est composé de bandes:

$$\mathrm{sp}(H_V) = \bigcup_{k=1}^{\infty} b_k, \qquad b_k = [b_k^-, b_k^+]. \tag{1.2}$$

Pour tout entier k, b_k est l'image de la $\mathrm{k}^{\text{ième}}$ valeur propre, $\lambda_k(\theta)$, de l'opérateur de Floquet $H_V^\theta = (D - \theta)^2 + V(x)$ sur $L^2(\mathbf{T}^n)$, le paramètre θ variant sur $\mathbf{R}^n$,

$$b_k = \{\lambda_k(\theta); \theta \in \mathbf{R}^n\}, \tag{1.3}$$

Received October 2, 1992, revised July 14, 1993
Communicated by T. Ikebe